EAST EUROPEAN JOURNAL OF PHYSICS
East Eur. J. Phys. Vol.5 No.2 (2018) 35-48 DOI:10.26565/2312-4334-2018-2-05

PACS: 11.15, 11.30,12.15, 41.20, 98.56

A NEW SYMMETRY OF ELECTROWEAK LAGRANGIAN

K.K. Merkotan, T.M. Zelentsova, N.O. Chudak, D.A. Ptashynskiy, V.V. Urbanevich, O.S. Potiienko, V.V. Voitenko, O.D. Berezovskyi, I.V. Sharph, V.D. Rusov

Odessa National Polytechnic University
1, Shevchenko Ave., Odessa, 65044, Ukraine
E-mail: sharph@ukr.net
Received March 12, 2018

Problems of the Standard Model, associated with the introduction of an electromagnetic field as a linear combination of fields on which various gauge groups representations are implemented, are analyzed. In this paper, we pay attention to the fact that in any model with gauge fields, the generators which are included in the covariant derivatives can be given only up to the transition to the equivalent representation. It is proposed that dynamic models with equivalent representations of generators should be physically equivalent. It means the requirement of the Lagrangian symmetry with respect to the transition from one equivalent generators representations to another. In particular, in the Lagrangian of the Standard Model, we have raising and lowering SU (2) group generators. The group multiplication law determines only the matrix elements modules of these generators while the arguments remain uncertain. In the paper, such uncertainty is considered as a local one. At different points of space-time, generators can be expressed in various equivalent representations. The compensation of the uncertain matrix elements arguments of the SU (2) group generators can be carried out with a local U (1) - transformation with the introduction of the corresponding gauge field, which can be considered as the electromagnetic field. The advantages of such electromagnetic field introduction in comparison with the method used in the Standard Model are analyzed.
KEY WORDS: non-Abelian gauge fields, electroweak interaction, Standard Model, local U(1) – symmetry of SU(2) group generators, W and Z – bosons.

НОВА СИМЕТРІЯ ЕЛЕКТРОСЛАБКОГО ЛАГРАНЖІАНУ

К.К. Меркотан, Т.М. Зеленцова, Н.О. Чудак, Д.А. Пташинський, В.В. Урбаневич, О.С. Потієнко, В.В. Войтенко, О.Д. Березовський, І.В. Шарф, В.Д. Русов
Одеський національний політехнічний університет
Пр. Шевченка 1, Одеса, 65044, Україна
Аналізуються проблеми стандартної моделі, пов'язані з введенням електромагнітного поля як лінійної комбінації полів, на яких реалізуються представлення різних калібрувальних груп. В роботі звертається увага на те що в будь-якій моделі із калібрувальними полями, генератори, які входять до коваріантних похідних, можуть бути задані лише з точністю до переходу до еквівалентного представлення. Пропонується вважати що динамічні моделі з еквівалентними представленнями генераторів повинні бути фізично еквівалентними. Це означає вимогу симетрії лагранжіану відносно переходу від одного з еквівалентних представлень генераторів до іншого. Зокрема в лагранжіані стандартної моделі маємо підвищуючий і понижуючий генератори групи SU(2). Закон групового множення визначає лише модулі матричних елементів цих генераторів, в той час як аргументи залишаються невизначеними. В роботі така невизначеність розглядається як локальна. В різних точках простору-часу генератори можуть задаватися в різних еквівалентних представленнях. Компенсація невизначених аргументів матричних елементів генераторів групи SU(2) може бути проведена за допомогою локального U(1) - перетворення з введенням відповідного калібрувального поля, яке може розглядатися як електромагнітне. Аналізуються переваги такого введення електромагнітного поля у порівнянні з методом, використаним в стандартній моделі.
КЛЮЧОВІ СЛОВА: неабелеві калібрувальні поля, електрослабка взаємодія, стандартна модель, локальна U(1) - симетрія генераторів групи SU(2), W і Z - бозони.

НОВАЯ СИММЕТРИЯ ЭЛЕКТРОСЛАБОГО ЛАГРАНЖИАНА

К.К. Меркотан, Т.Н. Зеленцова, Н.А. Чудак, Д.А. Пташинский, В.В. Урбаневич, А.С. Потиенко, В.В. Войтенко, А.Д. Березовский, И.В. Шарф, В.Д. Русов
Одесский национальный политехнический университет
Пр. Шевченка 1, Одесса, 65044, Украина
Анализируются проблемы стандартной модели, связанные с введением электромагнитного поля как линейной комбинации полей, на которых реализуются представления разных калибровочных групп. В работе обращается внимание на то, что в любой модели с калибровочными полями, генераторы, входящие в ковариантные производные, могут быть заданы только с точностью до перехода к эквивалентному представлению. Предлагается считать, что динамические модели с эквивалентными представлениями генераторов должны быть физически эквивалентными. Это означает требование симметрии лагранжиана относительно перехода от одного из эквивалентных представлений генераторов к другому. В частности, в лагранжиане стандартной модели имеем повышающий и понижающий генераторы группы SU(2). Закон группового умножения определяет только модули матричных элементов этих генераторов, в то время как аргументы остаются неопределенными. В работе эта неопределенность рассматривается как локальная. В разных точках пространства - времени генераторы могут задаваться в разных эквивалентных представлениях. Компенсация неопределенных аргументов матричных элементов генераторов группы SU(2) может быть проведена с помощью локального U(1)-преобразования с

введением соответствующего калибровочного поля, которое может рассматриваться как электромагнитное. Анализируются преимущества такого введения электромагнитного поля по сравнению с методом, использованным в стандартной модели.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: неабелевые калибровочные поля, электрослабое взаимодействие, стандартная модель, локальная U (1) - симметрия генераторов группы SU (2), W и Z - бозоны.

З нашої точки зору, суттєві проблеми стандартної моделі породжуються введенням електромагнітного поля як лінійної комбінації [1-5]

$$A_\beta(x) = \sin(\theta_W) A_{\beta,g=3}(x) + \cos(\theta_W) B_\beta(x). \tag{1}$$

Тут $A_\beta(x)-$ польові функції електромагнітного поля, $\beta-$ лоренцевий індекс, $A_{\beta,g}(x)-$ польові функції калібрувального поля, що відновлює локальну $SU(2)-$ симетрію, $g-$ внутрішній індекс, $B_\beta(x)-$ калібрувальне поле, що відновлює в моделі Вайнберга, Салама, Глешоу $U(1)-$ локальну симетрію, θ_W- кут Вайнберга. Локальна $SU(2)\otimes U(1)-$ симетрія лагранжіану стандартної моделі забезпечена вже на етапі введення полів $A_{\beta,g}(x)$ і $B_\beta(x)$ із відповідними подовженнями похідних і законами перетворення цих полів щодо локальних калібрувальних перетворень. Звичайно, будь які подальші заміни польових функцій, і зокрема заміна (1), вже не впливають на наявність локальної $SU(2)\otimes U(1)-$ симетрії. В цьому сенсі можна сказати що локальна $U(1)-$ симетрія може бути забезпечена і без введення електромагнітного поля як «нової змінної» за допомогою співвідношення (1), залишаючи лагранжіан стандартної моделі в «старих змінних» $A_{\beta,g}(x)$ і $B_\beta(x)$. Введення електромагнітного поля за допомогою співвідношення (1), таким чином, не має функцію встановлення локальної $U(1)-$ симетрії, а є, на наш погляд, вимушеним кроком, пов'язаним із тим що $U(1)-$ калібрувальне поле $B_\beta(x)$ має властивості, які не дозволяють інтерпретувати його як електромагнітне. Зокрема воно взаємодіє з полем Хіггса і набуває масу, а також однаково взаємодіє з обома компонентами ферміонних дублетів слабкого ізоспіну. Наприклад, взаємодіє як з електронами так і з нейтрино. Оскільки традиційний опис електромагнітного поля тісно пов'язаний саме з тією обставиною, що воно встановлює локальну $U(1)-$ інваріантність, зазначена зміна функції цього поля, спричиняє на нашу думку ряд теоретичних проблем стандартної моделі, які будуть розглянуті далі. Розглянемо згадані проблеми детальніше.

Перша проблема, що супроводжує розклад (1) полягає, на наш погляд, в тому, що динамічні рівняння для електромагнітного поля залежатимуть від обрання калібрування $SU(2)-$ полів. Дійсно частина лагранжіану електрослабкої теорії, що містить польові функції електромагнітного поля може бути записана в виді:

$$L_A^{int} = L_A^0 + \sum_{k=1}^{6} L_{A,k}^{int}, \tag{2}$$

де

$$L_A^0 = -\frac{1}{4} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\tau} \left(\frac{\partial A_\gamma(x)}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha(x)}{\partial x^\gamma} \right) \left(\frac{\partial A_\tau(x)}{\partial x^\beta} - \frac{\partial A_\beta(x)}{\partial x^\tau} \right), \tag{3}$$

$$L_{A,1}^{int} = -\frac{i}{2} e g^{\alpha\beta} g^{\gamma\tau} A_\beta(x) \left(\frac{\partial W_\gamma^+(x)}{\partial x^\alpha} W_\tau^-(x) - \frac{\partial W_\gamma^-(x)}{\partial x^\alpha} W_\tau^+(x) \right), \tag{4}$$

$$L_{A,2}^{int} = -\frac{i}{2} e g^{\alpha\beta} g^{\gamma\tau} A_\alpha(x) \left(W_\tau^+(x) \frac{\partial W_\chi^-(x)}{\partial x^\gamma} - W_\tau^-(x) \frac{\partial W_\beta^+(x)}{\partial x^\gamma} \right), \tag{5}$$

$$L_{A,3}^{int} = \frac{1}{2} e^2 g^{\alpha\beta} g^{\gamma\tau} A_\alpha(x) A_\tau(x) W_\gamma^+(x) W_\beta^-(x), \tag{6}$$

$$\begin{aligned} L_{A,4}^{int} = \frac{1}{2} e^2 ctg(\theta_W) g^{\alpha\beta} g^{\gamma\tau} \Big(& Z_\alpha^0(x) W_\beta^-(x) W_\gamma^+(x) A_\tau(x) + \\ + A_\alpha(x) W_\beta^-(x) W_\gamma^+(x) Z_{b_{11}}^0(x) & - 2 W_\alpha^+(x) W_\beta^-(x) A_\gamma(x) Z_\tau^0(x) \Big), \end{aligned} \tag{7}$$

$$L_{A,5}^{int}=-\frac{1}{2}e^2 g^{\alpha\beta}g^{\gamma\tau}W_{\alpha}^{+}(x)W_{\beta}^{-}(x)A_{\gamma}(x)A_{\tau}(x), \tag{8}$$

$$L_{A,6}^{int}=\frac{i}{4}eg^{\alpha\beta}g^{\gamma\tau}\left(\frac{\partial A_{\gamma}(x)}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial A_{\alpha}(x)}{\partial x^{\gamma}}\right)\left(W_{\beta}^{+}(x)W_{\tau}^{-}(x)-W_{\beta}^{-}(x)W_{\tau}^{+}(x)\right). \tag{9}$$

Тут $e-$ константа електромагнітної взаємодії, $\alpha,\beta,\gamma,\tau-$ лоренцеві індекси, $g^{\alpha\beta},g^{\gamma\tau}-$компоненти тензору Мінковського, $Z_{\gamma}^{0}-$поле $Z-$бозонів, $W_{\beta}^{+}(x)$ і $W_{\tau}^{-}(x)-$функції, що описують поле $W-$бозонів:

$$W_{\beta}^{+}(x)=A_{\beta,g_1=1}(x)-iA_{\beta,g_1=2}(x), W_{\beta}^{-}(x)=A_{\beta,g_1=1}(x)+iA_{\beta,g_1=2}(x). \tag{10}$$

Як видно з співвідношень (4)-(9), електромагнітне поле входить в лагранжіан взаємодії із множниками, що не є інваріантними відносно локальних $SU(2)-$перетворень. Решта доданків, які відновлюють локальну $SU(2)\otimes U(1)-$ інваріантність повного лагранжіану не залежать від поля $A_{\beta}(x)$ і тому не впливатимуть на динамічні рівняння цього поля. Доданок (9) можна інтерпретувати як внесок в лагранжіан взаємодії електромагнітного поля із полем $W^{\pm}-$бозонів. Але його не можна розглядати як результат «подовження» похідної. Це є формальним проявом того, про що йшлося вище: введення електромагнітного поля (1) позбавляє це поле функції відновлення локальної $U(1)-$інваріантності.

Інша проблема пов'язана із законом перетворення електромагнітного поля при локальному $SU(2)\otimes U(1)-$ перетворенні. Застосуємо таке перетворення до полів, що входять в (1). При цьому позначимо сукупність трьох параметрів $SU(2)-$ перетворення як $\vec{\theta}(x)=(\theta_1(x),\theta_2(x),\theta_3(x))$, а параметр $U(1)-$ перетворення - як $\theta(x)$. Запишемо в новій калібровці співвідношення, аналогічне (1), позначаючи відповідні польові конфігурації так само як і в (1), але «із штрихом»:

$$A'_{\beta}(x)=\sin(\theta_W)A'_{\beta,3}(x)+\cos(\theta_W)B'_{\beta}(x). \tag{11}$$

Користуючись законами перетворення неабелевого та абелевого полів отримаємо:

$$\begin{aligned}A'_{\beta}(x)&=\sin(\theta_W)D_{3,3}(\vec{\theta}(x))\left(\frac{\partial\theta_3(x)}{\partial x^{\beta}}+A_{\beta,3}(x)\right)+\\&+\sin(\theta_W)D_{3,2}(\vec{\theta}(x))\left(\frac{\partial\theta_2(x)}{\partial x^{\beta}}+A_{\beta,2}(x)\right)+\\&+\sin(\theta_W)D_{3,1}(\vec{\theta}(x))\left(\frac{\partial\theta_1(x)}{\partial x^{\beta}}+A_{\beta,1}(x)\right)+\\&+\cos(\theta_W)B_{\beta}(x)+\cos(\theta_W)\frac{\partial\theta(x)}{\partial x^{\beta}}.\end{aligned} \tag{12}$$

Тут $D_{g_1,g_2}(\vec{\theta}(x)), g_1,g_2=1,2,3-$елементи матриць приєднаного представлення групи $SU(2)$. Враховуючи (1) отримаємо для електромагнітного поля складний закон перетворення

$$\begin{aligned}A'_{\beta}(x)&=A_{\beta}(x)+\sin(\theta_W)D_{3,2}(\vec{\theta}(x))\left(\frac{\partial\theta_2(x)}{\partial x^{\beta}}+A_{\beta,2}(x)\right)+\\&+\sin(\theta_W)D_{3,1}(\vec{\theta}(x))\left(\frac{\partial\theta_1(x)}{\partial x^{\beta}}+A_{\beta,1}(x)\right)+\\&+\left(1-D_{3,3}(\vec{\theta}(x))\right)\cos(\theta_W)B_{\beta}(x)+\\&+\cos(\theta_W)\frac{\partial\theta(x)}{\partial x^{\beta}}+\sin(\theta_W)D_{3,3}(\vec{\theta}(x))\frac{\partial\theta_3(x)}{\partial x^{\beta}},\end{aligned} \tag{13}$$

який суттєво відрізняється від відомого з електродинаміки закону перетворення, що є закономірним наслідком присутності в (1) неабелевого доданку. У зв'язку із цим виникає питання, яким чином можуть бути побудовані величини, що спостерігаються - напруженості електричного і магнітного полів, бо для цього потрібно знайти вирази, які б не залежали ані від калібрування $SU(2)-$ поля, ані від калібрування $U(1)-$ поля.

Отже ввести електромагнітне поле за допомогою співвідношення (1) не «зруйнувавши» відомий і багаторазово експериментально перевірений опис електромагнітного поля, схоже неможливо. Тому в цій роботі ми пропонуємо дещо інший підхід до опису електрослабкої взаємодії, який не «руйнує» звичайний опис електромагнітного поля.

Сформулюємо основні принципи побудови моделі що пропонується. Звичайна процедура побудови локально симетричних лагранжіанів за допомогою заміни звичайних похідних на оператори коваріантних похідних забезпечує інваріантність лагранжіану відносно перетворень полів при певному виборі представлення генераторів. Цей вибір представлення генераторів визначається представленням, за яким перетворюються польові функції, до яких застосовується оператор коваріантної похідної. Однак закон перетворення польових функцій не визначає вибір представлення генераторів з множини еквівалентних між собою представлень. Зокрема поля $W^{\pm}-$бозонів входять до лагранжіану стандартної моделі з підвищуючим та понижуючим генераторами фундаментального представлення групи $SU(2)$. Оскільки єдиною характеристикою групи є закон групового множення, який визначає комутаційні співвідношення між генераторами представлень групи, то єдиним способом знаходження матричних елементів цих генераторів є застосування цих комутаційних співвідношень. Однак комутаційні співвідношення між генераторами групи $SU(2)$ визначають лише модулі матричних елементів підвищуючого і понижуючого генераторів, в той час як їх аргументи залишаються невизначеними. Різний вибір цих аргументів призведе до еквівалентних між собою представлень генераторів, тобто таких, які зводяться одне до одного певним перетворенням базису в просторі представлення. При цьому, з одного боку, на нашу думку, не існує якихось фізичних принципів, які б визначали певний вибір одного представлення з множини еквівалентних представлень. Жодне з них не є «кращім» за інші. З іншого боку, ніщо не заважає обирати в різних точках простору-часу різні еквівалентні представлення, і зазначена невизначеність аргументів є локальною. Це означає, що ті доданки лагранжіану стандартної моделі, які містять підвищуючий і понижуючий генератори разом із ними містять і принципово невизначені фазові множники. Звичайно, лагранжіан не повинен залежати від того чи іншого обрання цих множників, тому він повинен бути симетричним відносно перетворення яке їх компенсує. Суттєво, що це перетворення передбачає різні локальні $U(1)-$перетворення для різних компонент ферміонного дублету слабкого ізоспіну. Наприклад, ми можемо застосувати таке компенсуюче перетворення для електрон-позитронного поля і ніяк не перетворювати нейтринне поле. Тоді для досягнення симетрії доведеться «подовжувати» похідні в електрон-позитронній частині лагранжіану і не доведеться робити це в нейтринній частині. Відповідно, калібрувальне поле, яке таким чином з'явиться в лагранжіані, буде по-різному взаємодіяти з компонентами ферміонного дублету, що відповідає тому експериментальному факту, що вони мають різний електричний заряд. Окрім того, суттєвою обставиною є те, що лагранжіан стандартної моделі не містить слабкого току поля Хіггса. Тому лагранжіан взаємодії поля Хіггса з калібрувальними полями не містить генераторів, а відтак – не містить зазначеної невизначеності в аргументі. Тому розглянуте компенсуюче $U(1)-$ перетворення не стосуватиметься поля Хіггса. Відтак при проведенні цього перетворення не доведеться «подовжувати» похідні від поля Хіггса і введене таким чином $U(1)-$калібрувальне поле не взаємодіятиме із полем Хіггса і не набуватиме маси. Таким чином, таке $U(1)-$калібрувальне поле, не призводитиме до тих проблем, які розглядалися вище для $U(1)-$калібрувального поля стандартної моделі $B_{\beta}(x)$. Отже воно має всі властивості «звичайного» електромагнітного поля і, зокрема той самий закон перетворення при локальному $U(1)-$перетворенні. Це дозволяє побудувати для нього звичайним чином спостережні величини – компоненти напруженості електричного поля і індукції магнітного поля, на відміну від поля (1) стандартної моделі. Також з подальших міркувань буде видно, що динамічні рівняння для цього поля не залежать від обрання калібрування для неабелева поля $A_{\beta,g}(x)$.

Наскільки ми розуміємо, при побудові лагранжіану стандартної моделі невизначеність представлень генераторів не була врахована. Це призводить до того, що якщо застосувати до різних ферміонних полів різні локальні $U(1)-$перетворення, то інваріантність лагранжіану буде не відновлюватися як в нашій моделі, а навпаки – порушуватися. Тому $U(1)-$калібрувальне поле стандартної моделі «вимушене» однаково взаємодіяти з усіма ферміонними полями і полем Хіггса, що породжує проблеми, які призводять до введення електромагнітного поля за формулою (1). Описана модель призводить до лагранжіану, який має додаткову симетрію у порівнянні із лагранжіаном стандартної моделі. Дійсно, якщо застосувати перетворення, яке складається з локального переходу до еквівалентного представлення підвищуючого і понижуючого генераторів одночасно з компенсуючими локальними $U(1)-$перетвореннями ферміонних полів, то лагранжіан залишатиметься незмінним. Таку симетрію можна назвати симетрією відносно заміни еквівалентних представлень генераторів.

Розглянемо тепер описаний підхід більш докладно. При цьому розглянемо його спочатку в межах «старої» стандартної моделі, в якій нейтрино розглядалися як безмасові частинки, які представляються лише лівими спінорами. Далі ми обговоримо, як можна змінити цей підхід з урахуванням встановленого факту нейтринних осциляцій [6-8].

Метою даної роботи є альтернативний до стандартної моделі спосіб введення електромагнітної взаємодії, який буде позбавлений вказаних вище проблем.

СИМЕТРІЯ ЛАГРАНЖІАНУ НЕАБЕЛЕВОЇ КАЛІБРУВАЛЬНОЇ МОДЕЛІ ВІДНОСНО ЕКВІВАЛЕНТНИХ ПРЕДСТАВЛЕНЬ ГЕНЕРАТОРІВ

Розглянемо неабелеве калібрувальне поле в матричному виді (матриці на відміну від чисел будемо позначати «шляпкою»):

$$\hat{A}_{\beta}\left(x\right)=A_{\beta,g_1}\left(x\right)\hat{t}_{g_1}. \tag{14}$$

Тут $\hat{t}_{g_1}$ – генератори довільного представлення калібрувальної групи. Якщо обирати у якості $\hat{t}_{g_1}$ різні набори генераторів, то змінюватися буде тільки вираз для лагранжіану взаємодії калібрувального поля з ферміонними полями, але не лагранжіан самого неабелевого калібрувального поля. Вибір генераторів $\hat{t}_{g_1}$ продиктовано представленням калібрувальної групи на ферміонних полях. Але цей вибір фіксується лише з точністю до еквівалентного представлення. З фізичної точки зору природно вимагати, щоб динамічні моделі, в яких поля (14) «натягуються» на генератори еквівалентних представлень призводили до фізично еквівалентних результатів. При цьому формально ці моделі не можуть бути зведені одна до одної жодним перетворенням локальної калібрувальної групи, з якою пов'язане поле (14). Дійсно, закони таких перетворень знаходяться таким чином, щоб лагранжіан не змінювався при цих перетвореннях за певного вибору генераторів. Тому жодним перетворенням локальної калібрувальної групи, неможливо змінити вираз для генераторів цієї групи, що входять в лагранжіан. Звідси виникає необхідність змінення лагранжіану таким чином, щоб забезпечити симетрію відносно переходу від генераторів одного еквівалентного представлення до іншого. Вибір того чи іншого еквівалентного представлення може бути локальним - в різних точках простору-часу можна користуватись генераторами різних еквівалентних представлень. Це означає, що мова йде про додаткову локальну симетрію лагранжіану. Далі буде показано, що у випадку пов'язаної із слабкою взаємодією локальної групи $SU\left(2\right)$ така додаткова симетрія є локальною $U\left(1\right)-$ симетрією, що дозволяє забезпечити її шляхом введення електромагнітної взаємодії. Розглянемо більш докладно реалізацію цього плану. При цьому спочатку розглянемо введення електромагнітної взаємодії для лептонів, а потім - для кварків.

Введемо спочатку наступні позначення. Біспінорне поле позначатимемо $\psi_{s_1}\left(x\right)$, де $s_1=1,2,3,4-$ біспінорний індекс. Сукупність всіх чотирьох компонент цього поля розглядатимемо як стовпець, який будемо позначати $\hat{\psi}\left(x\right)$. Будемо розглядати це біспінорне поле в кіральному представленні:

$$\hat{\psi}\left(x\right)=\begin{pmatrix}\hat{\psi}_R\left(x\right)\\ \hat{\psi}_L\left(x\right)\end{pmatrix} \tag{15}$$

Тут $\hat{\psi}_R\left(x\right)$ і $\hat{\psi}_L\left(x\right)$ - правий і лівий двокомпонентні спінори, які при перетвореннях Лоренца, що не містять інверсій просторових вісь перетворюються за правим і лівим спінорними представленнями відповідно. Будемо представляти біспінор (15) в виді

$$\hat{\psi}\left(x\right)=\hat{\psi}^R\left(x\right)+\hat{\psi}^L\left(x\right), \tag{16}$$

де

$$\hat{\psi}^R\left(x\right)=\begin{pmatrix}\hat{\psi}_R\left(x\right)\\ \hat{0}\end{pmatrix},\hat{\psi}^L\left(x\right)=\begin{pmatrix}\hat{0}\\ \hat{\psi}_L\left(x\right)\end{pmatrix}, \tag{17}$$

і $\hat{0}$ - двокомпонентний стовпець із нульовими елементами. Звернемо увагу на те, що тут і далі ми використовуємо індекси R і L зверху, для позначення чотирикомпонентних біспінорних стовпців, в яких ліві компоненти для R і праві для L дорівнюють нулю. Нижні індекси R і L будемо використовувати для позначення двокомпонентних величин, які перетворюються за правим і лівим спінорними представленнями власної групи Лоренца. Далі, розглянемо два типи лівих біспінорних полів $\hat{\psi}^L_{I_3}\left(x\right),I_3=\pm 1/2$, де I_3-

позначає третю компоненту слабкого ізоспіну. При цьому вважатимемо, що поле $\hat{\psi}^L_{I_3=1/2}(x)$ відповідає електронному нейтрино, а $\hat{\psi}^L_{I_3=-1/2}(x)-$ лівій частині електронного біспінору в сенсі розкладу (17). Тому окрім введених позначень будемо користуватись ще такими

$$\hat{\psi}^L_{I_3=1/2}(x)=\hat{\nu}_e(x),\hat{\psi}^L_{I_3=-1/2}(x)=\hat{e}^L(x). \tag{18}$$

Також позначатимемо $\hat{e}^R(x)-$ праву частину електронного біспінору, а весь цей біспінор

$$\hat{e}(x)=\hat{e}^L(x)+\hat{e}^R(x) \tag{19}$$

Як зазвичай позначатимемо біспінор, діраківські спряжений до біспінору $\hat{\psi}$ як $\hat{\bar{\psi}}$. Окрім того, введемо такі позначення: $g-$ константа зв'язку слабкої взаємодії, $\hat{\sigma}_1/2,\hat{\sigma}_2/2,\hat{\sigma}_3/2$ - генератори представлення групи $SU(2)$ самими $SU(2)-$ матрицями. Генератори $\hat{\sigma}_1,\hat{\sigma}_2,\hat{\sigma}_3-$ можна представити матрицями Паулі, але для наших подальших цілей буде зручніше не фіксувати явний вид генераторів доти, доки це є можливим, і користуватися лише їх властивостями, що витікають з закону групового множення. Зокрема - комутаційними співвідношеннями.

Лагранжіан взаємодії біспінорних полів із калібрувальним полем, яке відновлює локальну $SU(2)-$ симетрію при переході від дійсних полів $A_{\beta,g_1=1}(x)$ і $A_{\beta,g_1=2}(x)$ до комплексних полів (10), приймає вид:

$$\begin{aligned}L^{int}_{\hat{A}}&=\frac{g}{2}W^+_\beta(x)\left(\hat{\bar{\psi}}^L_{(I_3)_1}(x)(\hat{\sigma}_+)_{(I_3)_1,(I_3)_2}\hat{\gamma}^\beta\hat{\psi}^L_{(I_3)_2}(x)\right)+\\&+\frac{g}{2}W^-_\beta(x)\left(\hat{\bar{\psi}}^L_{(I_3)_1}(x)(\hat{\sigma}_-)_{(I_3)_1,(I_3)_2}\hat{\gamma}^\beta\hat{\psi}^L_{(I_3)_2}(x)\right)+\\&+\frac{g}{2}A_{\beta,3}(x)\left(\hat{\bar{\psi}}^L_{(I_3)_1}(x)(\hat{\sigma}_3)_{(I_3)_1,(I_3)_2}\hat{\gamma}^\beta\hat{\psi}^L_{(I_3)_2}(x)\right).\end{aligned} \tag{20}$$

Тут введені стандартні позначення

$$\hat{\sigma}_+=\frac{1}{2}(\hat{\sigma}_1+i\hat{\sigma}_2),\hat{\sigma}_-=\frac{1}{2}(\hat{\sigma}_1-i\hat{\sigma}_2). \tag{21}$$

Введені таким чином оператори $\hat{\sigma}_+$ і $\hat{\sigma}_-$ співпадають із підвищуючим та понижуючим операторами, які зазвичай використовуються при побудові представлень групи $SU(2)$. Оберемо, як зазвичай [9-11], в якості базису простору представлення власні вектори генератору $\hat{\sigma}_3$. Якщо такий власний вектор, нормований на одиницю і який відповідає власному значенню m, позначити ψ_m, а максимальне власне значення m (вагу представлення) - позначити j, то дія підвищуючого і понижуючого генераторів визначається співвідношеннями

$$\begin{aligned}&\hat{\sigma}_+(\psi_m)=\alpha_m\psi_{m+1},m<j,\hat{\sigma}_+(\psi_m)=0,m=j,\\&\hat{\sigma}_-(\psi_m)=\beta_m\psi_{m-1},m>(-j),\hat{\sigma}_-(\psi_m)=0,m=-j.\end{aligned} \tag{22}$$

Застосування комутаційних співвідношень між генераторами представлень групи $SU(2)$ і умови взаємної ермітової спряженості генераторів $\hat{\sigma}_+$ і $\hat{\sigma}_-$ дозволяє знайти лише модулі коефіцієнтів α_m і β_m в той час, як їх аргументи залишаються довільними [9-11]. Ці аргументи завжди можуть бути прибрані відповідним перетворенням базису в просторі представлення, тобто переходом до еквівалентного представлення. Тому з точки зору звичайної постановки задачі в теорії груп, яка полягає в знаходженні всіх нееквівалентних незвідних представлень групи, такі аргументи не мають значення. Але в нашому випадку, хоча й представлення генераторів групи $SU(2)$ може обиратися з множини еквівалентних між собою представлень довільним чином, в формулі (20) звичайно мається на увазі один певний вибір цього представлення. Отже, маємо ситуацію, коли можливі різні варіанти цього певного вибору з множини еквівалентних між собою представлень. З фізичної точки зору природно вимагати, щоб результат не залежав від цього вибору, що означатиме додаткову $U(1)-$ симетрію системи. Більш явно цю симетрію можна пояснити таким чином.

Як відомо довільну $SU(2)$ матрицю $\hat{u}$ можна представити в виді

$$\hat{u} = \exp\left(i\hat{h}\right), \tag{23}$$

де $\hat{h}-$ самоспряжена матриця із нульовим слідом. Її можна параметризувати таким чином

$$\hat{h} = \begin{pmatrix} a/2 & (r/2)\exp\left(-i(\phi-\phi_0)\right) \\ (r/2)\exp\left(i(\phi-\phi_0)\right) & -(a/2) \end{pmatrix}, \tag{24}$$

де a, r і $\Delta\phi = \phi - \phi_0 -$ три дійсні параметри групи $SU(2)$. Невизначеність аргументів α_m і β_m є наслідком довільності обрання початку відліку аргументів ϕ_0 в (24). Дійсно, матриця $\hat{h}$ може бути представлена в виді:

$$\hat{h} = r\cos(\phi)\left(\hat{\sigma}_x/2\right) + r\sin(\phi)\left(\hat{\sigma}_y/2\right) + a\left(\hat{\sigma}_z/2\right), \tag{25}$$

де

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & \exp(-i\phi_0) \\ \exp(i\phi_0) & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & \exp(-i\phi_0)(-i) \\ \exp(i\phi_0)i & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{26}$$

- еквівалентне звичайно вживаному представлення матриць Паулі. Відповідно підвищуючий та понижуючий генератори (21) приймають вид:

$$\hat{\sigma}_+ = \begin{pmatrix} 0 & \exp(-i\phi_0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \exp(i\phi_0) & 0 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Якщо в якості базису в просторі представлення взяти найпростіший:

$$\psi_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \psi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{28}$$

то отримаємо:

$$\begin{gathered} \alpha_{-1/2} = \left\langle \psi_{1/2} \mid \hat{\sigma}_+\left(\psi_{-1/2}\right)\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \exp(-i\phi_0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(-i\phi_0), \\ \beta_{1/2} = \left\langle \psi_{-1/2} \mid \hat{\sigma}_-\left(\psi_{1/2}\right)\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \exp(i\phi_0) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \exp(i\phi_0). \end{gathered} \tag{29}$$

Ці значення відрізняються лише довільними фазовими множниками, пов'язаними із початком відліку аргументу ϕ_0, від звичайно вживаних в підручниках по теорії груп значень $\beta_{1/2} = \alpha_{-1/2} = 1$ [9, 11, 12]. Як видно з співвідношень (29) зайвий фазовий множник можна прибрати, якщо замість базису (28) скористатися також ортонормованим базисом

$$\psi'_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \psi'_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \exp(i\phi_0) \end{pmatrix}. \tag{30}$$

В цьому базисі отримаємо еквівалентне представлення групи $SU(2)$, в якому вже $\beta_{1/2} = \alpha_{-1/2} = 1$.

Для нас суттєво, що перехід від базису (28) до базису (30) є несиметричним відносно компонент стовпців, що утворюють лінійний простір, на якому діє група $SU(2)$. Це важливо, тому що в стандартній моделі всі поля, які є компонентами таких стовпців мають різний заряд, тобто по-різному взаємодіють із електромагнітним полем. Зокрема, якщо повернутися до лагранжіану (20), то з урахуванням розглянутої невизначеності аргументів коефіцієнтів $\alpha_{-1/2}$ і $\beta_{1/2}$, а також того, що така невизначеність може бути локальною (тобто величина ϕ_0 в (29) може бути довільною функцією координат), дію підвищуючого і понижуючого генераторів можна представити таким чином:

$$\begin{gathered} \hat{\sigma}_+ \begin{pmatrix} \hat{\nu}_e(x) \\ \hat{e}^L(x) \end{pmatrix} = \hat{\nu}_e(x)\hat{\sigma}_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \hat{e}^L(x)\hat{\sigma}_+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \exp\left(-i\phi_0(x)\right) \begin{pmatrix} \hat{e}^L(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\sigma}_- \begin{pmatrix} \hat{\nu}_e(x) \\ \hat{e}^L(x) \end{pmatrix} = \hat{\nu}_e(x)\hat{\sigma}_- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \hat{e}^L(x)\hat{\sigma}_- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \exp\left(i\phi_0(x)\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\nu}_e(x) \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{31}$$

З урахуванням цих результатів, лагранжіан для першого покоління лептонів з урахуванням взаємодії із калібрувальним $SU(2)-$ полем може бути записаний в виді:

$$\begin{aligned}L=&\frac{i}{2}\left(\hat{\bar{e}}^R(x)\hat{\gamma}^\beta\frac{\partial\hat{e}^R(x)}{\partial x^\beta}-\frac{\partial\hat{\bar{e}}^R(x)}{\partial x^\beta}\hat{\gamma}^{a_1}\hat{e}^R(x)\right)+\\&+\frac{i}{2}\left(\hat{\bar{e}}^L(x)\hat{\gamma}^\beta\frac{\partial\hat{e}^L(x)}{\partial x^\beta}-\frac{\partial\hat{\bar{e}}^L(x)}{\partial x^\beta}\hat{\gamma}^\beta\hat{e}^L(x)\right)+\frac{i}{2}\left(\hat{\bar{\nu}}_e(x)\hat{\gamma}^\beta\frac{\partial\hat{\nu}_e(x)}{\partial x^\beta}-\frac{\partial\hat{\bar{\nu}}_e(x)}{\partial x^\beta}\hat{\gamma}^\beta\hat{\nu}_e(x)\right)+\\&+\frac{g}{2}\exp\left(-i\phi_0(x)\right)W_\beta^+(x)\left(\hat{\bar{\nu}}_e(x)\hat{\gamma}^\beta\hat{e}^L(x)\right)+\frac{g}{2}\exp\left(i\phi_0(x)\right)W_\beta^-(x)\left(\hat{\bar{e}}^L(x)\hat{\gamma}^\beta\hat{\nu}_e(x)\right)+\\&+\frac{g}{2}A_{\beta,3}(x)\left(\hat{\bar{\nu}}_e(x)\hat{\gamma}^\beta\hat{\nu}_e(x)\right)-\frac{g}{2}A_{\beta,3}(x)\left(\hat{\bar{e}}^L(x)\hat{\gamma}^\beta\hat{e}^L(x)\right).\end{aligned}\tag{32}$$

Для того, щоб лагранжіан не залежав від обрання одного з еквівалентних представлень групи $SU(2)$ потрібно компенсувати множники $\exp\left(\mp i\phi_0(x)\right)$ в (32). Це можна зробити відповідним локальним $U(1)-$ перетворенням полів:

$$\hat{e}^L(x)=\exp\left(i\phi_0(x)\right)\hat{e}'^L(x),\hat{\bar{e}}^L(x)=\exp\left(-i\phi_0(x)\right)\hat{\bar{e}}'^L(x).\tag{33}$$

При цьому частина лагранжіану (32), яка містить похідні від поля $\hat{e}^L(x)$ потребуватиме подовження похідних і введення компенсуючого поля. Таким чином, може бути введена взаємодія лівих компонент електронного поля з електромагнітним полем. Але, оскільки, електромагнітне поле повинне однаково взаємодіяти як із лівими, так і з правими компонентами електронного поля, ми можемо скористатися тим, що лагранжіан (32) буде залишатися інваріантним, якщо разом з перетворенням (33) піддати такому ж перетворенню й праві компоненти, і також подовжити похідні від них вводячи те ж саме компенсуюче поле, що й для лівих компонент з тим самим законом перетворення. Отже, якщо ми об'єднаємо праве і ліве електронне поля в одне поле $\hat{e}(x)$, що визначається формулою (19) і подовжимо його похідні, а також додамо до нього лагранжіани вільних калібрувальних полів, то отримаємо лагранжіан виду:

$$\begin{aligned}L_{(E\otimes U(1))\circ(SU(2)\otimes E)}=&\frac{i}{2}\left(\hat{\bar{e}}(x)\hat{\gamma}^\beta\left(\frac{\partial\hat{e}(x)}{\partial x^\beta}-ig^{em}A_\beta(x)\hat{e}(x)\right)-\right.\\&-\left.\left(\frac{\partial\hat{\bar{e}}(x)}{\partial x^\beta}+ig^{em}A_\beta(x)\hat{\bar{e}}(x)\right)\hat{\gamma}^\beta\hat{e}(x)\right)+\frac{i}{2}\left(\hat{\bar{\nu}}_e(x)\hat{\gamma}^\beta\frac{\partial\hat{\nu}_e(x)}{\partial x^\beta}-\frac{\partial\hat{\bar{\nu}}_e(x)}{\partial x^\beta}\hat{\gamma}^\beta\hat{\nu}_e(x)\right)+\\&+\frac{g}{4}\alpha_{-1/2}(x)W_\beta^+(x)\left(\hat{\bar{\nu}}_e(x)\hat{\gamma}^\beta\left(\hat{I}-\hat{\gamma}^5\right)\hat{e}(x)\right)+\\&+\frac{g}{4}\beta_{1/2}(x)W_\beta^-(x)\left(\hat{\bar{e}}(x)\left(\hat{I}+\hat{\gamma}^5\right)\hat{\gamma}^\beta\hat{\nu}_e(x)\right)+\\&+\frac{g}{2}A_{\beta,3}(x)\left(\left(\hat{\bar{\nu}}_e(x)\hat{\gamma}^\beta\hat{\nu}_e(x)\right)-\frac{1}{4}\left(\hat{\bar{e}}(x)\left(\hat{I}+\hat{\gamma}^5\right)\hat{\gamma}^\beta\left(\hat{I}-\hat{\gamma}^5\right)\hat{e}(x)\right)\right)-\\&-\frac{1}{4}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\tau}\left(F_{\alpha,\gamma,+}(x)F_{\beta,\tau,-}(x)+F_{\alpha,\gamma,3}(x)F_{\beta,\tau,3}(x)\right)-\frac{1}{4}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\tau}F_{\alpha\gamma}(x)F_{\beta\tau}(x).\end{aligned}\tag{34}$$

Тут введені наступні позначення $\hat{I}-$ одинична матриця 4×4 по біспінорним індексах, $\hat{\gamma}^5=i\hat{\gamma}^0\hat{\gamma}^1\hat{\gamma}^2\hat{\gamma}^3$ (матриця $(1/2)\left(\hat{I}-\gamma^5\right)$ переводить стовпець (19) в стовпець з тими ж лівими компонентами і нульовими правими компонентами), $g^{em}-$ константа електромагнітної взаємодії,

$$\alpha_{-1/2}(x)=\exp\left(-ig^{em}\phi_{em}(x)\right),\beta_{1/2}(x)=\exp\left(ig^{em}\phi_{em}(x)\right),\phi_{em}(x)\equiv\phi_0(x)/g^{em}.\tag{35}$$

Тут ми врахували (29). Окрім того:

$$
\begin{aligned}
F_{\alpha\beta,+}(x) &= \frac{\partial W_\beta^+(x)}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial W_\alpha^+(x)}{\partial x^\beta} + igW_\alpha^+(x)A_{\beta,3}(x) - igW_\beta^+(x)A_{\alpha,3}(x),\\
F_{\alpha\beta,-}(x) &= \frac{\partial W_\beta^-(x)}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial W_\alpha^-(x)}{\partial x^\beta} - igW_\alpha^-(x)A_{\beta,3}(x) + igW_\beta^-(x)A_{\alpha,3}(x),\\
F_{\alpha\beta,3}(x) &= \frac{\partial A_{\beta,3}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_{\alpha,3}}{\partial x^\beta} - \frac{i}{2}g\left(W_\alpha^+(x)W_\beta^-(x) - W_\alpha^-(x)W_\beta^+(x)\right),
\end{aligned}
\tag{36}
$$

- компоненти тензору напруженості неабелева поля і

$$
F_{\alpha\beta}(x) = \frac{\partial A_\beta(x)}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha(x)}{\partial x^\beta},
\tag{37}
$$

- компоненти тензору напруженості електромагнітного поля. Позначення лагранжіану (34) пов'язано із тим, що він є інваріантний відносно послідовного проведення двох локальних перетворень (таку операцію позначатимемо «$\circ$»). Перше з них має вид

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \hat{\nu}_e(x) \\ \hat{e}^L(x) \end{pmatrix} = \exp\left(-\frac{i}{2}g\theta_{g_1}(x)\hat{\sigma}_{g_1}\right)\begin{pmatrix} \hat{\nu}'_e(x) \\ \hat{e}'^L(x) \end{pmatrix}, \hat{e}^R(x) = \hat{e}'^R(x),\\
&\left(\hat{\bar{\nu}}_e(x) \quad \hat{\bar{e}}^L(x)\right) = \left(\hat{\bar{\nu}}'_e(x) \quad \hat{\bar{e}}'^L(x)\right)\exp\left(-\frac{i}{2}g\theta_{g_1}(x)\hat{\sigma}_{g_1}\right), \hat{\bar{e}}_R(x) = \hat{\bar{e}}'^R(x),\\
&A_{a_1,g_1}(x) = D_{g_1,g_2}\left(\vec{\theta}(x)\right)A'_{a_1,g_2}(x) - \frac{\partial\theta_{g_1}(x)}{\partial x^{a_1}}, A_{a_1}(x) = A'_{a_1}(x),\\
&W'^+_{a_1}(x) = A'_{a_1,g_1=1}(x) - iA'_{a_1,g_1=2}(x), W'^-_{a_1}(x) = A'_{a_1,g_1=1}(x) + iA'_{a_1,g_1=2}(x),\\
&\alpha_{-1/2}(x) = \alpha'_{-1/2}(x), \beta_{1/2}(x) = \beta'_{1/2}(x).
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Це перетворення природно позначити $SU(2)\otimes E$. Тут $E-$ позначає тотожне перетворення. А саме позначення $SU(2)\otimes E$ відображає той факт, що частина величин, як видно з (38), піддається локальному $SU(2)-$ перетворенню, а частина перетворюється тривіально. Друге перетворення позначатимемо $E\otimes U(1)$ і воно має вид:

$$
\begin{aligned}
&\hat{\nu}'_e(x) = \hat{\nu}''_e(x), \hat{\bar{\nu}}'_e(x) = \hat{\bar{\nu}}''_e(x),\\
&\hat{e}'^L(x) = \exp\left(ig^{em}\phi_{em}(x)\right)\hat{e}''^L(x), \hat{\bar{e}}'^L(x) = \hat{\bar{e}}''^L(x)\exp\left(-ig^{em}\phi_{em}(x)\right),\\
&\hat{e}'^R(x) = \exp\left(ig^{em}\phi_{em}(x)\right)\hat{e}''^R(x), \hat{\bar{e}}'^R(x) = \hat{\bar{e}}''^R(x)\exp\left(-ig^{em}\phi_{em}(x)\right)\\
&\alpha'_{-1/2}(x) = \exp\left(-ig^{em}\phi_{em}(x)\right)\alpha''_{-1/2}(x), \beta'_{1/2}(x) = \exp\left(ig^{em}\phi_{em}(x)\right)\beta''_{1/2}(x)\\
&A'_\beta(x) = A''_\beta(x) + \frac{\partial\phi_{em}(x)}{\partial x^\beta}, A'_{\beta,g_1}(x) = A''_{\beta,g_1}(x),\\
&W'^+_\beta(x) = W''^+_\beta(x), W'^-_\beta(x) = W''^-_\beta(x).
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Зауважимо, що перетворення $SU(2)\otimes E$ і $E\otimes U(1)$ не комутують. При цьому, першим повинне робитися саме $SU(2)\otimes E-$ перетворення. Це пов'язано із тим, що як вже зазначалося, при $E\otimes U(1)$ - перетворенні величини з різними значеннями проекції слабкого ізоспіну I_3 перетворюються за різними законами, в той час як $SU(2)\otimes E-$ перетворення «перемішує» ці компоненти. Наприклад, в розглянутому випадку, як видно з наведених вище міркувань $E\otimes U(1)$ - перетворення, нетривіально діє на компоненту з меншим значенням I_3. Тому потрібно спочатку визначити цю компоненту за допомогою $SU(2)\otimes E-$ перетворення і лише потім застосовувати $E\otimes U(1)$. Якщо до лагранжіану (34) додати внески, аналогічні