East Eur. J. Phys. Vol.4 No.1 (2017) 4-27

PACS: 47.32.C

NONLINEAR DYNAMO IN A ROTATING ELECTRICALLY CONDUCTING FLUID

M.I. Kopp[1], A.V. Tur[3], V.V. Yanovsky[1,2]
[1]*Institute for Single Cristals, Nat. Academy of Science Ukraine,*
Lenine Ave.60, Kharkov 31001,Ukraine
e-mail: yanovsky@isc.kharkov.ua
[2]*V.N. Karazin Kharkiv National University*
Sq. Svobody 4, Kharkiv, 61022 Ukraine
[3]*Universite Toulouse [UPS], CNRS, Institute of Research for Astrophysics and Planetology*
9 avenue du Colonel Roche, BP 44346, 31028 Toulouse Cedex 4, France
Received January 21, 2017

We found a new large-scale instability, which arises in the rotating conductive fluid with small-scale turbulence. Turbulence is generated by small-scale external force with a low Reynolds number. The theory is built simply by the method of multiscale asymptotic expansions. Nonlinear equations for vortex and magnetic perturbations obtained in the third order for small Reynolds number. It is shown that the combined effects of the Coriolis force and the small external forces in a rotating conducting fluid possible large-scale instability. The large-scale increments of the instability, correspond to generation as the vortex and magnetic disturbances. This type of instability is classified as hydrodynamic and MHD alpha-effect. We studied the stationary regimes of nonlinear equations of magneto-vortex dynamo. In the limit of weakly conducting fluid found stationary solutions in the form of helical kinks. In the limit of high conductivity fluid was obtained stationary solutions in the form of nonlinear periodic waves and kinks.
KEY WORDS: equations of magnetohydrodynamics, Coriolis force, multiscale asymptotic expansions, small-scale turbulence, α-effect, spiral kinks

НЕЛІНІЙНЕ ДИНАМО В ЕЛЕКТРОПРОВІДНІЙ РІДИНІ, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ

М.Й. Копп[1], А.В. Тур[3], В.В. Яновський[1,2]
[1]*Інститут монокристалів, Національна Академія Наук України*
пр. Науки 60, 61001 Харків, Україна
[2]*Харківський національний університет імені В.Н. Каразина*
майдан Свободи, 4, 61022, Харків, Україна
[3]*Universite Toulouse [UPS], CNRS, Institute of Research for Astrophysics and Planetology*
9 avenue du Colonel Roche, BP 44346, 31028 Toulouse Cedex 4, France
Знайдена нова великомасштабна нестійкість, виникаюча в електропровідній рідині, яка обертається з дрібномасштабною турбулентністю. Турбулентність генерується дрібномасштабною зовнішньою силою з малим числом Рейнольдса. Теорія побудована строгим методом великомасштабного асимптотичного розкладу. Нелінійні рівняння для вихрових і магнітних збурень отримані в третьому порядку по малому числу Рейнольдса. Показано, що в результаті спільної дії сили Коріоліса і дрібномасштабної зовнішньої сили в електропровідній рідині, яка обертається, можлива великомасшабна нестійкість. Отримані інкременти великомасштабної нестійкості, відповідні генерації як вихрових, так і магнітних збурень. Такий тип нестійкості класифікується як гідродинамічний і магнітогідродинамічний альфа-ефект. Було вивчено стаціонарні режими нелінійних рівнянь магніто-вихрового динамо. В межі слабкопровідної рідини знайдені стаціонарні рішення у вигляді спіральних кінків. В межі високої провідності рідини отримані стаціонарні рішення у вигляді нелінійних періодичних хвиль і кінків.
КЛЮЧОВІ СЛОВА: рівняння магнітної гідродинаміки, сила Коріоліса, великомасштабні асимптотичні розкладання, дрібномасштабна турбулентність, α-ефект, спіральні кінки

НЕЛИНЕЙНОЕ ДИНАМО ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

М.И.Копп[1], А.В.Тур[3], В.В.Яновский[1,2]
[1]*Институт монокристаллов, Национальная Академия Наук Украины*
пр. Ленина 60, 61001 Харьков, Украина
[2]*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина*
пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина
[3]*Universite Toulouse [UPS], CNRS, Institute of Research for Astrophysics and Planetology*
9 avenue du Colonel Roche, BP 44346, 31028 Toulouse Cedex 4, France
Найдена новая крупномасштабная неустойчивость, которая возникает во вращающейся электропроводящей жидкости с мелкомасштабной турбулентностью. Турбулентность генерируется мелкомасштабной внешней силой с малым числом Рейнольдса. Теория построена строгим методом многомасштабного асимптотического разложения. Нелинейные уравнения для вихревых и магнитных возмущений получены в третьем порядке по малому числу Рейнольдса. Показано, что в результате совместного действия силы Кориолиса и мелкомасштабной внешней силы во вращающейся электропроводящей жидкости возможна крупномасштабная неустойчивость. Получены инкременты крупномасштабной неустойчивости, соответствующие генерации как вихревых, так и магнитных возмущений. Такой тип неустойчивости классифицируется как гидродинамический и магнитогидродинамический альфа-эффект. Изучены стационарные режимы нелинейных уравнений магнито-вихревого динамо. В пределе слабопроводящей жидкости найдены стационарные решения в виде спиральных

кинков. В пределе высокой проводимости жидкости получены стационарные решения в виде нелинейных периодических волн и кинков.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: уравнения магнитной гидродинамики, сила Кориолиса, многомасштабные асимптотические разложения, мелкомасштабная турбулентность, α -эффект, спиральные кинки

Как известно, исследованием проблемы происхождения магнитных полей у астрофизических объектов таких как планеты, Солнце, галактики занимается теория динамо [1-10]. Огромную роль здесь играет вращательное движение космических тел, благодаря которому возбуждаются различные волновые и вихревые движения такие как гироскопические волны, волны Россби, внутренние волны, локализованные вихри и когерентные структуры [11-18]. Эффект вращения также оказывает существенное влияние на турбулентное движение жидкости (см. например [19]). Природа такого влияния связана с действием силы Кориолиса, которая нарушает зеркальную симметрию турбулентного движения жидкости. Турбулентность с таким свойством получила название спиральной. Именно в спиральной турбулентности сначала был открыт α -эффект в электропроводящей жидкости или магнитной гидродинамике (МГД) [20], а затем в обычной гидродинамике (ГД) [20]. В МГД спиральная турбулентность генерирует крупномасштабное магнитное поле, а в ГД крупномасштабные вихревые структуры. Изначально теория α -эффекта в МГД строилась в кинематической постановке, т.е. когда не учитывается обратное воздействие магнитного поля на турбулентное течение. В этом случае генерация среднего (крупномасштабного) магнитного поля происходит под действием средней э.д.с которая пропорциональна среднему магнитному полю $\overline{\vec{H}}$: $\vec{\mathcal{E}}=\alpha\overline{\vec{H}}$. Коэффициент усиления α пропорционален средней спиральности поля скорости $\alpha\sim\overline{\vec{v}rot\vec{v}}$, которая характеризует меру заузленности вихревых движений среды. Как показано в работе [22] ненулевая средняя спиральность не является необходимым условием для появления α - эффекта, но способствует его возникновению. Несмотря на формальную аналогию уравнения индукции для магнитного поля $\vec{H}$ и уравнения для завихренности $\vec{\omega}=rot\vec{v}$, перенос α -эффекта на ГД сталкивается с дополнительной проблемой. Причина отрицательного эффекта заключается в определенной симметрии тензора напряжений Рейнольдса в осредненном уравнении Навье-Стокса [23]. Оказалось, что для появления ГД α - эффекта одной спиральности турбулентности не достаточно, нужны другие факторы нарушения симметрии турбулентного течения. Такими факторами являются сжимаемость среды [21], неоднородный поток [24], градиент температуры в поле тяжести [25]. Эффект генерации крупномасштабных вихревых структур (КВС) спиральной турбулентностью получил название вихревого динамо. Механизмы вихревого динамо развивались для описания разнообразных явлений в турбулентной атмосфере и океане. Особое внимание уделялось конвективному вихревому динамо [25-32], где спиральная турбулентность приводила к крупномасштабной неустойчивости, вследствие которой образуется одна конвективная ячейка, интерпретируемая как огромный вихрь типа тропического циклона. Известно также большое количество работ по генерации КВС с учетом эффектов вращения [33-37]. Принципиально отличный α - эффект был обнаружен в работе [38], в которой турбулентное движение жидкости моделируется внешней мелкомасштабной силой $\vec{F}_0$. Модель внешней мелкомасштабной силы была выбрана с нарушением четности (при нулевой спиральности $\vec{F}_0 rot\vec{F}_0=0$). Эффект генерации крупномасштабных возмущений такой силой получил название анизотропного кинетического альфа-эффекта или АКА-эффекта [38]. Отметим, что нарушение четности более общее явление, чем спиральность, хотя именно спиральность $\overline{\vec{v}rot\vec{v}}\neq 0$ является самым распространенным механизмом нарушения четности гидродинамических течений. В этой же работе была рассмотрена крупномасштабная неустойчивость в несжимаемой жидкости методом асимптотических многомасштабных разложений. В качестве малого параметра для асимптотического метода многомасштабных разложений используется число Рейнольдса $R=\frac{v_0 t_0}{\lambda_0}\ll 1$ для мелкомасштабных пульсаций скорости v_0, вызванных мелкомасштабной силой. В дальнейшем, применяя метод многомасштабных асимптотических разложений были разработаны линейные и нелинейные теории вихревого динамо для сжимаемых сред [39, 40], конвективных сред со спиральной внешней силой [30-32]. Новый пример генерации КВС во вращающейся несжимаемой жидкости был найден в работе [41]. Там же было показано, что в результате развития крупномасштабной неустойчивости во вращающейся жидкости возникают нелинейные крупномасштабные спиральные вихревые структуры типа вихрей Бельтрами или локализованные кинки с внутренней спиральной структурой. Обобщение этого ГД α - эффекта на случай электропроводящей жидкости приводит к новым крупномасштабным структурам.

В этой работе получена крупномасштабная неустойчивость, приводящая к генерации КВС и магнитных полей и формированию крупномасштабных нелинейных стационарных структур. В разделе **ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ** приведены основные уравнения и сформулирована постановка задачи, исследуемой в настоящей работе. В разделе **УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО МАГНИТО-**

ВИХРЕВОГО ДИНАМО В «КВАЗИДВУМЕРНОЙ» МОДЕЛИ, применяя метод многомасштабных асимптотических разложений, получены осредненные уравнения МГД во вращающейся жидкости для крупномасштабных полей. Алгебраическая структура уравнений многомасштабного асимптотического разложения в различных порядках по R приведена в Приложении I. Корреляционные функции, входящие в осредненные уравнения, выражаются через мелкомасштабные поля в нулевом приближении по R. В Приложении II получены решения уравнений для мелкомасштабных полей в нулевом порядке по R. Используя эти решения, в Приложении III вычислены корреляционные функции, соответствующие напряжениям Рейнольдса, напряжениям Максвелла и турбулентной э.д.с. В результате, в разделе **УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО МАГНИТО-ВИХРЕВОГО ДИНАМО В «КВАЗИДВУМЕРНОЙ» МОДЕЛИ** получена самосогласованная система нелинейных уравнений для крупномасштабных магнитных и гидродинамических полей. В отличие от кинематического динамо, эти поля оказывают взаимное влияние друг на друга. Система уравнений, описывающая взаимное влияние полей, названа уравнениями нелинейного магнито-вихревого динамо. В разделе **КРУПНОМАСШТАБНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ** исследуется устойчивость малых крупномасштабных вихревых и магнитных возмущений. В разделе **НЕЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ СТРУКТУРЫ** проведен численный анализ нелинейных уравнений в стационарном режиме. Там же показано существование локализованных вихревых и магнитных структур.

Целью настоящей работы является исследование линейной и нелинейной генерации крупномасштабных вихревых и магнитных полей во вращающихся электропроводных турбулентных средах. Полученные в работе результаты могут найти применение во многих астрофизических задачах.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исходными уравнениями для описания динамики вращающейся электропроводящей несжимаемой жидкости являются хорошо известные уравнения одножидкостной магнитной гидродинамики:

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V}=-\frac{\nabla P}{\rho_{00}}+2\left[\vec{V}\times\vec{\Omega}\right]+\frac{1}{4\pi\rho_{00}}\left[rot\vec{B}\times\vec{B}\right]+\nu\Delta\vec{V}+\vec{F}_0\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=rot\left[\vec{V}\times\vec{B}\right]+\nu_m\Delta B\,, \tag{2}$$

$$div\vec{V}=0,\;\; div\vec{B}=0\,. \tag{3}$$

Здесь $\vec{V}$, P, $\vec{B}$ - возмущения скорости, давления и индукции магнитного поля относительно равновесного состояния:

$$\nabla P_{00}=-\rho_{00}\nabla\Phi_{00}-\rho_{00}\left[\vec{\Omega}\times\left[\vec{\Omega}\times\vec{r}\right]\right], \tag{4}$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор элемента среды, Φ_{00} - равновесный потенциал, описывающий внешнюю силу тяжести, ν - коэффициент кинематической вязкости жидкости, $\nu_m=\dfrac{c^2}{4\pi\sigma_c}$ - коэффициент магнитной вязкости, σ_c - коэффициент электропроводности среды. Вектор угловой скорости вращения $\vec{\Omega}$ для простоты считаем постоянным (твердотельное вращение) и в декартовой системе координат: $\vec{\Omega}=\left(\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3\right)$. Кроме того, среду будем считать безграничной и влиянием внешнего магнитного поля пренебрежем. В этом случае мелкомасштабные магнитные поля или так называемые «затравочные» магнитные поля могут возбуждаться не турбулентными механизмами, а например в результате развития гидродинамических неустойчивостей [1-3], термомагнитных неустойчивостей [42]. Такая постановка задачи интересна для теории динамо [1-10]. В уравнение (1) включена внешняя сила $\vec{F}_0$, моделирующая источник возбуждения в среде мелкомасштабных и высокочастотных флуктуаций поля скорости $\vec{v}_0$ с малым числом Рейнольдса $R=\dfrac{v_0t_0}{\lambda_0}\ll 1$:

$$div\vec{F}_0=0,\;\; \vec{F}_0=f_0\vec{F}_0\left(\frac{x}{\lambda_0},\;\frac{t}{t_0}\right), \tag{5}$$

где λ_0 - характерный масштаб, t_0 - характерное время, f_0 - характерная амплитуда. Перейдем в уравнениях (1)-(3) к безразмерным переменным. Чтобы не загромождать обозначения сохраним за безразмерными переменными обозначения прежних размерных переменных. Это не вызывает в дальнейшем никаких затруднений.

$$t \to \frac{t}{t_0}, \quad \vec{V} \to \frac{\vec{V}}{v_0}, \quad \vec{F}_0 \to \frac{\vec{F}_0}{f_0}, \quad \vec{B} \to \frac{\vec{B}}{B_0},$$
$$\vec{x} \to \frac{\vec{x}}{\lambda_0}, t_0 = \frac{\lambda_0^2}{\nu}, \quad f_0 = \frac{v_0 \nu}{\lambda_0^2}, \quad P \to \frac{P}{P_0 \rho_{00}}, \quad P_0 = \frac{\nu v_0}{\lambda_0}. \tag{6}$$

В безразмерных переменных уравнения (1)-(3) примут вид:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + RV_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho_{00}} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \varepsilon_{ijk} V_j D_k + \widetilde{Q} R \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} \frac{\partial B_l}{\partial x_m} B_k + \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_k^2} + F_0^i , \tag{7}$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} - Pm^{-1} \frac{\partial^2 B_i}{\partial x_k^2} = R \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} V_n B_p , \tag{8}$$

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_k} = \frac{\partial B_k}{\partial x_k} = 0 . \tag{9}$$

Характер эволюции полей, описываемых системой уравнений (7)-(9), в значительной степени будет определяться следующими безразмерными параметрами: $D_i = \frac{2\Omega_i \lambda_0^2}{\nu}$ - безразмерный параметр вращения ($i = 1,2,3$) на масштабе λ_0, связанный с числом Тейлора $Ta_i = D_i^2$ [11-13]. Этот безразмерный параметр характеризует степень превалирования сил Кориолиса над вязкими силами. $\widetilde{Q} = \frac{Q}{Pm}$, $Q = \frac{\sigma_c B_0^2 \lambda_0^2}{c^2 \rho_{00} \nu}$ - число Чандрасекара, $Pm = \frac{\nu}{\nu_m}$ - магнитное число Прандтля. Малым параметром асимптотического разложения считаем число Рейнольдса $R = \frac{v_0 t_0}{\lambda_0} \ll 1$ мелкомасштабных движений, а параметры D и $\widetilde{Q}$ произвольными, не влияющими на схему разложения. Рассмотрим следующую постановку задачи. Пусть внешняя сила на фоне равновесного состояния вызывает мелкомасштабные и высокочастотные осцилляции скорости. Средние значения таких осцилляций нулевые, но из-за нелинейного взаимодействия в некоторых порядках теории возмущения возникают члены, которые при усреднении не обращаются в нуль. Такие члены называются секулярными и являются условиями разрешимости многомасштабного асимптотического разложения. Нахождение уравнений разрешимости, которые и определяют эволюцию крупномасштабных возмущений, является основной задачей.

УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО МАГНИТО-ВИХРЕВОГО ДИНАМО В «КВАЗИДВУМЕРНОЙ» МОДЕЛИ

Рассмотрим более детально применение метода многомасштабных асимптотических разложений к проблеме нелинейной эволюции крупномасштабных вихревых и магнитных возмущений во вращающейся электропроводящей среде. Метод построения асимптотических уравнений развит в работах [30-32,38], следуя которым представим пространственные и временные производные в уравнениях (7)-(9) в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \partial_t + R^4 \partial_T, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \to \partial_i + R^2 \nabla_i , \tag{10}$$

где ∂_i и ∂_t - обозначают производные по быстрым переменным $x_0 = \left(\vec{x}_0, t_0\right)$, а ∇_i и ∂_T - производные по медленным переменным $X = \left(\vec{X}, T\right)$. Переменные x_0 и X соответственно можно назвать мелкомасштабные и крупномасштабные переменные. При построении нелинейной теории переменные $\vec{V}$, $\vec{B}$, P представим в виде асимптотического ряда:

$$\vec{V}\left(\vec{x}, t\right) = \frac{1}{R} \vec{W}_{-1}\left(X\right) + \vec{v}_0\left(x_0\right) + R\vec{v}_1 + R^2 \vec{v}_2 + R^3 \vec{v}_3 + \cdots$$
$$\vec{B}\left(\vec{x}, t\right) = \frac{1}{R} \vec{B}_{-1}\left(X\right) + \vec{B}_0\left(x_0\right) + R\vec{B}_1 + R^2 \vec{B}_2 + R^3 \vec{B}_3 + \cdots \tag{11}$$
$$P(x) = \frac{1}{R^3} P_{-3} + \frac{1}{R^2} P_{-2} + \frac{1}{R} P_{-1} + P_0 + R(P_1 + \overline{P}_1\left(X\right)) + R^2 P_2 + R^3 P_3 + \cdots.$$

Подставим разложения (10)-(11) в систему уравнений (7)-(9) и зануляя вклады в каждом порядке по R до степени R^3 включительно, получим уравнения многомасштабного асимптотического разложения. Алгебраическая структура асимптотического разложения уравнений (7)-(9) в различных порядках по R приведена в Приложении I. Там же показано, что именно в порядке R^3 получаются основные секулярные уравнения, т.е. уравнения для крупномасштабных полей:

$$\partial_t W_{-1}^i - \Delta W_{-1}^i + \nabla_k \overline{(v_0^k v_0^i)} = -\nabla_i \overline{P}_1 + \widetilde{Q}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jml}\left(\nabla_m \overline{(B_0^l B_0^k)}\right), \tag{12}$$

$$\partial_t B_{-1}^i - Pm^{-1}\Delta B_{-1}^i = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{knp}\nabla_j \overline{(v_0^n B_0^p)}\,. \tag{13}$$

Используя свертку тензоров $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jml} = \delta_{km}\delta_{il} - \delta_{im}\delta_{kl}$, $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{knp} = \delta_{in}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{jp}$ и вводя обозначения $\vec{W} = \vec{W}_{-1},\ \vec{H} = \vec{B}_{-1}$ система уравнений (12)-(13) примет следующий вид:

$$\partial_T W_i - \Delta W_i + \nabla_k \overline{(v_0^k v_0^i)} = -\nabla_i \overline{P}_1 + \widetilde{Q}\left(\nabla_k \overline{(B_0^i B_0^k)} - \frac{\nabla_i}{2}\overline{(B_0^k)^2}\right), \tag{14}$$

$$\partial_T H_i - Pm^{-1}\Delta H_i = \nabla_j \overline{(v_0^i B_0^j)} - \nabla_j \overline{(v_0^j B_0^i)}\,. \tag{15}$$

Уравнения (14)-(15) дополняются секулярными уравнениями, которые были получены в Приложении I:

$$\nabla_k\left(W_k W_i\right) = -\nabla_i\ P_{-1} + \widetilde{Q}\left(\nabla_k H_i - \nabla_i H_k\right)H_k\,,$$
$$W_j \nabla_j H_i = H_j \nabla_j W_i\,,$$
$$W_j \nabla_j H_i = H_j \nabla_j W_i\,,$$
$$\nabla_i W_i = 0,\ \nabla_i H_i = 0,\ \nabla_i P_{-3} = \varepsilon_{ijk} W_j D_k\,.$$

Таким образом для получения системы уравнений (14)-(15), описывающей эволюцию крупномасштабных полей $\vec{W}$ и $\vec{H}$ потребовалось дойти до третьего порядка теории возмущения. Это довольно характерное явление при применении метода многомасштабных разложений. Уравнения (14)-(15) приобретают замкнутый вид после вычисления корреляционных функций -- напряжений Рейнольдса $\nabla_k \overline{(v_0^k v_0^i)}$, напряжений Максвелла $\nabla_k \overline{(B_0^i B_0^k)}$ и турбулентной э.д.с. $\mathcal{E}_n = \varepsilon_{nij}\overline{v_0^i B_0^j}$. Вычисление этих корреляционных функций значительно упрощается, если воспользоваться «квазидвумерным» приближением, которое часто применяется для описания крупномасштабных вихревых и магнитных полей во многих астрофизических и геофизических задачах [3,14,30,31]. В рамках этого приближения для нашей задачи будем считать, что крупномасштабная производная по Z более предпочтительная, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial Z} \gg \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y},$$

а геометрия крупномасштабных полей имеет следующий вид:

$$\vec{W} = \left(W_1(Z), W_2(Z), 0\right), \vec{H} = \left(H_1(Z), H_2(Z), 0\right). \tag{16}$$

В рамках «квазидвумерной» задачи система уравнений (14)-(15) упрощается:

$$\partial_T W_1 - \Delta W_1 + \nabla_Z \overline{(v_0^z v_0^x)} = \widetilde{Q}\nabla_Z \overline{(B_0^z B_0^x)}\,, \tag{17}$$

$$\partial_T W_2 - \Delta W_2 + \nabla_Z \overline{(v_0^z v_0^y)} = \widetilde{Q}\nabla_Z \overline{(B_0^z B_0^y)}\,, \tag{18}$$

$$\partial_T H_1 - Pm^{-1}\Delta H_1 = \nabla_Z \overline{(v_0^x B_0^z)} - \nabla_Z \overline{(v_0^z B_0^x)}\,, \tag{19}$$

$$\partial_T H_2 - Pm^{-1}\Delta H_2 = \nabla_Z \overline{(v_0^y B_0^z)} - \nabla_Z \overline{(v_0^z B_0^y)}\,. \tag{20}$$

Для получения уравнений (17)-(20) в замкнутом виде мы используем решения уравнений для мелкомасштабных полей в нулевом порядке по R , полученные в Приложении II. Далее необходимо вычислить корреляторы, входящие в систему уравнений (17)-(20):

$$T^{31} = \overline{w_0 u_0} = \overline{w_{01}\left(u_{01}\right)^*} + \overline{\left(w_{01}\right)^* u_{01}} + \overline{w_{03}\left(u_{03}\right)^*} + \overline{\left(w_{03}\right)^* u_{03}}\,,$$

$$T^{32} = \overline{w_0 v_0} = \overline{w_{01}\left(v_{01}\right)^*} + \overline{\left(w_{01}\right)^* v_{01}} + \overline{w_{03}\left(v_{03}\right)^*} + \overline{\left(w_{03}\right)^* v_{03}}\,,$$

$$S^{31} = \overline{\widetilde{w}_0 \widetilde{u}_0} = \overline{\widetilde{w}_{01}\left(\widetilde{u}_{01}\right)^*} + \overline{\left(\widetilde{w}_{01}\right)^* \widetilde{u}_{01}} + \overline{\widetilde{w}_{03}\left(\widetilde{u}_{03}\right)^*} + \overline{\left(\widetilde{w}_{03}\right)^* \widetilde{u}_{03}}\,,$$