East Eur. J. Phys. Vol.2 No.3 (2015) 26-39

PACS: 66.30.-h, 05.40.Fb

THE SOLUTION OF ONE CLASS OF EQUATIONS WITH FRACTIONAL SPATIAL DERIVATIVE

L.V. Tanatarov, V.Yu. Gonchar, A.I. Kirdin
National Science Center "Kharkov Institute of Physics and Technology"
1, Akademicheskaya Str., Kharkov 61108, Ukraine
E-mail: kirdin@kipt.kharkov.ua
Received September 15, 2015

The equations of particle motion were analytically solved using model Levy flight for the probability density of finding a particle in the given interval, the average particle residence time in this interval, and the particle probability to leave this interval by the given moment. The solution is presented in an arbitrary orthogonal system of functions. This representation provides additional opportunities for studies of systems with anomalous diffusion in a variety of practical applications.
KEY WORDS: anomalous diffusion, theoretical model, Levy flights, finite interval, the solution of equations, fractional spatial derivative, any orthogonal system of functions

ПРО РОЗВ'ЯЗОК ОДНОГО КЛАСУ РІВНЯНЬ З ДРОБОВОЮ ПРОСТОРОВОЮ ПОХІДНОЮ

Л.В. Танатаров, В.Ю. Гончар, А.І. Кірдін
Національний Науковий Центр «Харківський фізико-технічний інститут»
вул. Академічна 1, м. Харків 61108, Україна

У моделі польотів Леві аналітично розв`язано рівняння руху частинок для щільності ймовірності знаходження частинки в заданому інтервалі, середнього часу перебування частинки в ньому та ймовірності покинути інтервал до даного моменту. Рішення надано в довільній ортогональній системі функцій. Таке уявлення відкриває додаткові можливості для досліджень систем з аномальною дифузією в різних практичних додатках.
КЛЮЧОВІ СЛОВА: аномальна дифузія, теоретична модель, польоти Леві, кінцевій Інтервал, розв`язок рівнянь, дробова просторова похідна, довільна ортогональна система функцій

О РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ С ДРОБНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Л.В. Танатаров, В.Ю. Гончар, А.И. Кирдин
Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
ул. Академическая 1, г. Харьков 61108, Украина

В модели полетов Леви аналитически решены уравнения движения частиц для плотности вероятности нахождения частицы в заданном интервале, среднего времени пребывания частицы в нем и вероятности покинуть интервал к данному моменту. Решение представлено в произвольной ортогональной системе функций. Такое представление открывает дополнительные возможности для исследований систем с аномальной диффузией в различных практических приложениях.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: аномальная диффузия, теоретическая модель, полеты Леви, конечный интервал, решение уравнений, дробная пространственная производная, произвольная ортогональная система функций

Процесс случайного движения макроскопической частицы в среде (броуновского движения) давно является одной из центральных тем статистической физики. В связи с открытием в природе систем с аномальной диффузией и насущной потребностью создания теоретических моделей для описания такого рода систем, эта тема продолжает оставаться актуальной и в настоящее время. Одной из таких моделей является модель полетов Леви, в которой механизм аномальной диффузии реализуется под действием внешней случайной силы с устойчивым законом распределения Леви [1]. Экспериментальное детальное исследование процесса супердиффузии осуществить непросто, и удачи случается нечасто. Как положительный пример отметим работу [2], в которой для анализа использована модель полетов Леви. Теория аномальной диффузии основана на обобщении уравнений диффузии путем замены обычных операторов дифференцирования соответствующими операторами дробного порядка [3,4]. Обычная схема построения уравнения диффузии следующая. Левая его часть содержит производную по времени от плотности или концентрации в бесконечно малом пространственном интервале рассматриваемого вещества, правая часть – расход вещества из этого объема (интервала), равный разности его градиентов плотности (концентрации) на обоих концах интервала. В случае обычной диффузии расход равен разнице плотности (концентрации). В более сложном случае расход пропорционален его доле, идущей на построение нового вещества или на другое взаимодействие, то есть, свертке с неким ядром, описывающим конкретный процесс взаимодействия с рассматриваемым веществом. Если для случая полубесконечной геометрии задача аномальной диффузии рассмотрена довольно подробно, то решение уравнения супердиффузии на конечном интервале с заданными граничными условиями методом разделения переменных является существенно более сложным, и, насколько нам известно, в общем виде такое решение пока не получено. Отметим, что в работе [5] приведено решение дробно-линейного уравнения одномерной супердиффузии на конечном интервале, но, по нашему мнению, оно не является математически корректным. Эти обстоятельства и послужили стимулом для данной работы.

Целью работы является получение точного решения одномерного уравнения Фоккера-Планка с дробной пространственной производной для полубесконечного и конечного интервала. Найденное точное решение дает возможность достоверно вычислять физические характеристики процесса аномальной диффузии, в частности, такие как плотность вероятности нахождения частицы в данном интервале, среднее время пребывания частицы в этом интервале и вероятность для частицы покинуть интервал к данному моменту времени.

РЕШЕНИЕ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

Речь будет идти о решении уравнений типа

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_0^\infty K(x-x')P(x',t)dx'. \tag{1}$$

Это интегродифференциальное уравнение, в котором дифференциальный и интегральный операторы присутствуют не в виде линейной комбинации, а в виде произведения. Прежде всего, так как это дифференциальное уравнение первого порядка по времени, необходимо задать начальное условие для искомой функции распределения плотности вещества:

$$P(x,t)\big|_{t=0}=P_0(x),$$

где $P_0(x)$ - функция, заданная на положительной полуоси $x>0.$ Решение уравнения (1) также ищем на этом интервале. Доопределим искомую функцию нулем при $x<0.$ Тогда можем записать:

$$\int\limits_0^\infty K(x-x')P(x',t)dx'=\int\limits_{-\infty}^\infty K(x-x')P(x',t)dx'.$$

Здесь $K(x)$, по предположению, четная функция своего аргумента. Поскольку правая часть этого равенства представляет собой свертку, ее можно представить в виде:

$$\int\limits_{-\infty}^\infty K(x-x')P(x',t)dx'=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty \widetilde{K}(k)\widetilde{P}(k,t)e^{-ikx}dk,$$

тогда

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_0^\infty K(x-x')P(x',t)dx'=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty k^2\widetilde{K}(k)\widetilde{P}(k,t)e^{-ikx}dk.$$

Подставляя в уравнение (1), запишем:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty k^2\tilde{K}(k)\tilde{P}(k,t)e^{-ikx}dk=0,\quad x>0.$$

Проведем одностороннее преобразование Лапласа по времени:

$$sP(x,s)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty k^2\widetilde{K}(k)\widetilde{P}(k,s)e^{-ikx}dk=P_0(x).$$

Проведем обобщенное преобразование Фурье F^+ от обеих частей равенства по переменной x [6]. В результате получаем:

$$s\widetilde{P}(k,s)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty e^{ikx}dx\int\limits_{-\infty}^\infty k'^2\widetilde{K}(k')\widetilde{P}(k',s)e^{-ik'x}dk'=\widetilde{P}_0(k). \tag{2}$$

Функции $\widetilde{P}(k,s)$, $\widetilde{P}_0(k)$ голоморфны в верхней полуплоскости комплексного переменного k, следовательно, представимы в виде интегралов Коши:

$$\widetilde{P}(k,s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^\infty\frac{dq\widetilde{P}(q,s)}{q-k},\quad \widetilde{P}_0(k)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^\infty\frac{dq\widetilde{P}_0(q)}{q-k},\quad \operatorname{Im}k>0. \tag{3}$$

Изменим порядок интегрирования в (2). Сначала проведем интегрирование по x:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty dx e^{i(k-k')x}=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{k'-k}. \tag{4}$$

Соотношение (2), с учетом (3) и (4), можем переписать в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H(q)dq}{q-k}=0,\quad \operatorname{Im}k>0, \tag{5}$$

где

$$H(k)\equiv[s+k^2\widetilde{K}(k)]\widetilde{P}(k,s)-\widetilde{P}_0(k). \tag{6}$$

Условие (5), необходимое и достаточное для того, чтобы функция $H(k)$ была голоморфна в нижней полуплоскости $\operatorname{Im}k<0$ [7]. Факторизуем множитель перед $\widetilde{P}(k,s)$ [8]:

$$s+k^2\widetilde{K}(k)=\frac{N^+}{N^-}.$$

Функция N^+ голоморфна в верхней полуплоскости, а N^- - в нижней. Подставляя в (6), получаем:

$$N^-(k)H(k)=N^+(k)\widetilde{P}(k,s)-\widetilde{P}_0(k)N^-(k). \tag{7}$$

Представим произведение $\widetilde{P}_0(k)N^-(k)$ в виде разности предельных значений функций голоморфных в верхней и нижней полуплоскостях: $\widetilde{P}_0(k)N^-(k)=S^+-S^-$, где

$$S^+(k)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\widetilde{P}_0(q)N^-(q)dq}{q-k},\ \operatorname{Im}k>0,\quad S^-(k)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\widetilde{P}_0(q)N^-(q)dq}{q-k},\ \operatorname{Im}k<0.$$

Подставляя эту разность в $\widetilde{P}_0(k)N^-(k)$ в уравнение (7), получаем:

$$N^-(k)H(k)-S^-(k)=N^+(k)\widetilde{P}(k,s)-S^+(k),\quad \operatorname{Im}k=0. \tag{8}$$

Левая и правая части равенства (8) продолжают единую аналитическую функцию $Q(k)$ через действительную ось, так как слева стоит функция голоморфная в нижней, а справа – в верхней полуплоскостях, то есть,

$$N^+(k)\widetilde{P}(k,s)-S^+(k)=Q(k). \tag{9}$$

Если функция $s+k^2\widetilde{K}(k)$ имеет индекс, равный нулю на действительной оси, то функция $Q(k)$, которая в общем случае является полиномом, степень которого зависит от индекса, оказывается не зависящей от k. Подробнее об этом см. в [8]. Из (9) получаем:

$$\widetilde{P}(k,s)=[S^+(k)+Q(k)]/N^+(k). \tag{10}$$

Для функций N^+, N^- получаем выражения:

$$N^+(k)=\exp[\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dq}{q-k}\ln(s+q^2\tilde{K}(q))],\ \operatorname{Im}k>0,\ \operatorname{Im}k=+0,$$

$$N^-(k)=\exp[\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dq}{q-k}\ln(s+q^2\tilde{K}(q))],\ \operatorname{Im}k<0,\ \operatorname{Im}k=-0.$$

Оригинал функции $P(x,s)$ получаем по формуле:

$$P(x,s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon}dke^{-ikx}[S^+(k)+Q(k)]/N^+(k).$$

Если $x<0,$ то контур интегрирования можно замкнуть по дуге бесконечно большого радиуса в верхней полуплоскости, и интеграл будет равен нулю, поскольку функция $N^+(k)$ голоморфна и не имеет нулей в этой полуплоскости, а функции $S^+(k), Q(k)$ также голоморфны. Если $x>0,$ то контур можно замкнуть по дуге бесконечного радиуса в нижней полуплоскости, но мы не знаем аналитического продолжения подынтегральной функции в нижнюю полуплоскость. Остается одна возможность: устремить ε к нулю и воспользоваться формулами Сохоцкого [9] для предельных значений подынтегральных функций на действительной оси:

$$N^+(k)=\sqrt{s+k^2\widetilde{K}(k)}\exp\left(\frac{\Phi(k)}{2\pi i}\right),\quad N^-(k)=(\sqrt{s+k^2\widetilde{K}(k)})^{-1}\exp\left(\frac{\Phi(k)}{2\pi i}\right),$$

$$\Phi(k) \equiv VP\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dq}{q-k}\ln(s+q^2\widetilde{K}(q)), \tag{11}$$

$$S^+(k) = \frac{1}{2}N^-(k)\tilde{P}_0(k) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dq}{q-k}\tilde{P}_0(q)N^-(q), \operatorname{Im} k > 0, \operatorname{Im} k = +0,$$

$$S^-(k) = -\frac{1}{2}N^-(k)\tilde{P}_0(k) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dq}{q-k}\tilde{P}_0(q)N^-(q), \operatorname{Im} k < 0, \operatorname{Im} k = -0.$$

Интегралы по действительной оси понимаются в смысле главного значения. В формулу (10) входит функция Q. Мы уже говорили, что от k она не зависит, то есть, это функция только s. Для ее определения необходимо выполнить условие, вытекающее из постановки задачи. Это может быть, например, условие обращения в нуль плотности $P(x,t)$ при $x=0$ (условие «прилипания» частицы). Если индекс полинома ν в функции Q отличен от нуля (см. в [8]), то произвольными функциями s являются коэффициенты полинома $Q(k,s)$, число которых равно $\nu+1$.

Уравнение Фоккера-Планка, описывающее полеты Леви на всей оси, записывают в виде [10]:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{\kappa}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(\xi,t)d\xi}{\left|x-\xi\right|^{\alpha-1}}, \quad \kappa \equiv -2\Gamma(2-\alpha)\cos\frac{\alpha\pi}{2}, 1<\alpha<2,$$

и решают с помощью преобразования Фурье. Решение это хорошо известно (см. [10]). Если полеты Леви происходят только на положительной полуоси, то нижний предел интегрирования логично заменить на нуль. Если решать это уравнение методом интегральных преобразований, то нужно доопределить функцию распределения при отрицательных значениях x. Естественно доопределить ее нулем. Если частица впрыскивается в точку $x = x_0 > 0$ в начальный момент, то начальное условие: $P(x,0) = \delta(x-x_0)$. В этом случае

$$\widetilde{P}_0(k) = e^{ikx_0}, \quad s + k^2\widetilde{K}(k) = s + \left|k\right|^{\alpha}.$$

Нас интересует вероятность нахождения частицы на положительной полуоси в произвольный момент времени (вероятность выживания). Она равна

$$\int_0^{\infty}P(x,t)dx = \widetilde{P}(k,t)\Big|_{k=0}.$$

Плотность вероятности того, что частица покинет положительную полуось в момент времени t:

$$p(t) = -\frac{d}{dt}\int_0^{\infty}P(x,t)dx = -\frac{\partial\widetilde{P}(k,t)}{\partial t}\bigg|_{k=0}.$$

Образ Лапласа (по времени) этой функции:

$$\widetilde{p}(s) = -\int_0^{\infty}e^{-st}\frac{\partial\widetilde{P}(k,t)}{\partial t}\bigg|_{k=0}dt = \widetilde{P}(k,t)\Big|_{k=0,t=0} - s\widetilde{P}(k,s)\Big|_{k=0}.$$

Но $\widetilde{P}(k,t)\Big|_{k=0,t=0} = \int_0^{\infty}P(x,0)dx = 1,$ то есть, $\widetilde{p}(s) = 1 - s\widetilde{P}(k,s)\Big|_{k=0}.$

С помощью (10), полагая $Q=0$, получаем:

$$\widetilde{P}(k,s) = \frac{\widetilde{P}_0(k)}{2(s+\left|k\right|^{\alpha})} + \frac{\exp(-\Phi(k)/(2\pi i))}{(s+\left|k\right|^{\alpha})^{1/2}}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dq}{q-k}\frac{\widetilde{P}_0(q)\exp\left(\dfrac{\Phi(q)}{2\pi i}\right)}{(s+\left|q\right|^{\alpha})^{1/2}},$$

откуда

$$\widetilde{p}(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{dq}{q\sqrt{1+q^{\alpha}}}\sin[\frac{1}{2\pi}\Phi(qs^{1/\alpha}) - qx_0 s^{1/\alpha}].$$

Совершим обратное преобразование, перейдя от s к t:

$$p(t)=\frac{1}{2\pi^2 i}\int_{-i\infty}^{i\infty}dse^{st}\int_0^{\infty}\frac{dq}{q\sqrt{1+q^{\alpha}}}\sin[\frac{1}{2\pi}\Phi(qs^{1/\alpha})-qx_0s^{1/\alpha}].$$

Поскольку $\Phi(0)=0,$ внутренний интеграл сходится. Переходя к новой переменной интегрирования s/t, запишем:

$$p(t)=\frac{1}{2i\pi^2 t}\int_{-i\infty}^{i\infty}e^s ds\int_0^{\infty}\frac{dq}{q\sqrt{1+q^{\alpha}}}\sin[\frac{1}{2\pi}\Phi(q\frac{s^{1/\alpha}}{t^{1/\alpha}})-qx_0\frac{s^{1/\alpha}}{t^{1/\alpha}}],$$

$$\Phi(q\frac{s^{1/\alpha}}{t^{1/\alpha}})=2VP.\int_0^{\infty}\frac{dq'}{q'^2-1}\ln(1+q'^{\alpha}\frac{q^{\alpha}}{t}).$$

Пользуясь формулой для синуса разности, можно переписать эту формулу в виде:

$$p(t)=\frac{1}{2i\pi^2 t}\int_0^{\infty}\frac{dq}{q\sqrt{1+q^{\alpha}}}\sin[\frac{1}{\pi}VP\int_0^{\infty}\frac{dq'}{q'^2-1}\ln(1+q'^{\alpha}\frac{q^{\alpha}}{t})]\int_{-i\infty}^{i\infty}e^s ds\cos(qx_0\frac{s^{1/\alpha}}{t^{1/\alpha}})-$$

$$-\frac{1}{2i\pi^2 t}\int_0^{\infty}\frac{dq}{q\sqrt{1+q^{\alpha}}}\cos[\frac{1}{\pi}VP\int\frac{dq'}{q'^2-1}\ln(1+q'^{\alpha}\frac{q^{\alpha}}{t})]\int_{-i\infty}^{i\infty}e^s ds\sin(qx_0\frac{s^{1/\alpha}}{t^{1/\alpha}}).$$

Первый интеграл при $t\to\infty$ убывает не медленнее чем t^{-2}. Оценим последнее слагаемое. Во-первых, заменим косинус единицей. Будем сначала интегрировать по q, затем по *s*. Поскольку $t\to\infty,$ в интеграле $\int_0^{\infty}\frac{dq}{q\sqrt{1+q^{\alpha}}}\sin\left(qx_0\frac{s^{1/\alpha}}{t^{1/\alpha}}\right)$ играют роль большие значения *q*. Но тогда можно под корнем пренебречь единицей, по сравнению с q^{α}, то есть, вычислять $\int_0^{\infty}\frac{dq}{q^{1+\alpha/2}}\sin\left(qx_0\frac{s^{1/\alpha}}{t^{1/\alpha}}\right)$. В справочнике [11] приведен интеграл:

$$\int_0^{\infty}x^{\mu-1}\sin axdx=\frac{\Gamma(\mu)}{a^{\mu}}\sin\frac{\mu\pi}{2}.$$

Воспользовавшись этим, получаем

$$-\int_0^{\infty}\frac{dq}{q^{1+\alpha/2}}\sin\left(qx_0\frac{s^{1/\alpha}}{t^{1/\alpha}}\right)=\Gamma(-\alpha/2)\sin\frac{\alpha\pi}{4}\cdot\frac{x_0^{\alpha/2}s^{1/2}}{t^{1/2}}.$$

То есть,

$$-\frac{1}{2\pi^2 it}\int_0^{\infty}\frac{dq}{q\sqrt{1+q^{\alpha}}}\int_{-i\infty}^{i\infty}e^s\left(qx_0\frac{s^{1/\alpha}}{t^{1/\alpha}}\right)=\frac{\Gamma(-\alpha/2)\sin\frac{\alpha\pi}{4}}{2\pi^2 it^{3/2}}x_0^{\alpha/2}\int_{-i\infty}^{i\infty}e^s s^{1/2}ds.$$

Изогнем контур интегрирования на плоскости s влево вокруг начала координат:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}e^s s^{1/2}ds=\frac{1}{2\pi i}\int_C e^s s^{1/2}ds=-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}.$$

Таким образом, асимптотика функции $p(t)$ такова:

$$p(t)=\frac{\Gamma(1-\alpha/2)\sin\frac{\alpha\pi}{4}}{\alpha\pi^{3/2}t^{3/2}}x_0^{\alpha/2}. \tag{12}$$

Отметим, что такая зависимость от времени согласуется с общим результатом, полученным в работе [12]. Отметим, что использовано частное решение, соответствующее $Q=0.$ Если не полагать $Q(s)=0,$ то все равно асимптотика $p(t)\sim t^{-3/2}$. Действительно, большим t соответствуют малые s. Если существует

$\lim Q(s) = Q(0)$ при $s \to 0$, то, как это следует из выражения для N^+ и формулы (10), слагаемое в выражении для $P(k,s)\big|_{k=0}$, пропорциональное Q, оказывается пропорциональным $\sqrt{s}$, что соответствует $t^{-3/2}$ в выражении для $p(t)$. Следующие члены разложения по s дают $t^{-5/2}$ и т.д. Асимптотическая зависимость $t^{-3/2}$, по-видимому, справедлива для любого ядра K, для которого $\lim k^2 K(k,s) = 0$ при $k \to 0$.

Если в качестве ядра интегрального уравнения использовать антисимметричную комбинацию $K(x,x') = \left|x - x'\right|^{1-\alpha} - \left|x + x'\right|^{1-\alpha}$, то условие $P(x,t)\big|_{x=0} = 0$ выполняется автоматически. Однако, решать это уравнение методом Винера-Хопфа уже нельзя.

Если доопределить функцию распределения нечетным образом, т.е., положить $P(-x,t) = -P(x,t)$, то в уравнении (1) можно нижний предел интегрирования заменить на $-\infty$. При этом начальное условие также нужно сделать антисимметричным:

$$P(x,t)\big|_{t=0} = \delta(x - x_0) - \delta(x + x_0).$$

При этом $P(x,t) = G(x,x_0;t) - G(x,-x_0;t)$, где G - функция Грина для всей оси. Образ Лапласа-Фурье функции распределения в этом случае равен

$$\widetilde{P}(k,s) = 2i \sin kx_0 \cdot \frac{1}{s + |k|^{\alpha}}.$$

Асимптотика функции $p(t)$ при больших временах имеет вид:

$$p(t) \approx \frac{2}{\pi\alpha}\Gamma(1 + 1/\alpha)\frac{x_0}{t^{1+1/\alpha}}, \tag{13}$$

т.е., ее временной ход зависит от величины α. Большего доверия заслуживает полученная выше асимптотика, пропорциональная $t^{-3/2}$.

СЛУЧАЙ КОНЕЧНОГО ИНТЕРВАЛА

Изучение полетов Леви на конечном отрезке действительной оси приводит к необходимости решать уравнение для плотности вероятности $P(x,t)$ вида

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} + \upsilon \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} = D\frac{\partial^{\alpha} P(x,t)}{\partial x^{\alpha}}, \qquad \frac{\partial^{\alpha} P}{\partial x^{\alpha}} \equiv \frac{1}{\kappa}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^L \frac{P(\xi,t)}{|x - \xi|^{\alpha-1}}. \tag{14}$$

Скорость дрейфа υ считаем постоянной. Пусть в начальный момент частица вводится в точке $x = x_0$, что приводит к начальному условию к уравнению (14):

$$P(x,0) = \delta(x - x_0). \tag{15}$$

Показатель α заключен в пределах интервала (1,2). Для однозначного решения дифференциальной задачи необходимо задать граничные условия на концах отрезка (0,1). Будем считать, что условием поглощения частицы на границах интервала являются условия:

$$P(0,t) = P(L,t) = 0. \tag{16}$$

Прежде всего, перейдем к безразмерным переменным, положив $x' = x/L,\ t' = t/t_0$. Характерное время t_0 определим условием $L^{\alpha} = Dt_0$. В безразмерных переменных уравнение (14) приобретает вид:

$$\frac{\partial P}{\partial t'} + F\frac{\partial P}{\partial x'} - \frac{\partial^{\alpha} P}{\partial x^{\alpha}} = 0, \quad F \equiv \frac{\upsilon L^{\alpha-1}}{D}. \tag{17}$$

В дальнейшем штрихи мы будем опускать. Условие (15) сохраняет свой вид, а условие (16) записывается в виде:

$$P(0,t) = P(1,t) = 0. \tag{18}$$

Уравнение (14) выполняется только на интервале (0,1), но мы будем считать его справедливым на всей числовой оси.

Выразим среднее время T пребывания блуждающей частицы в интервале (0,1) в терминах плотности вероятности. Разобьем интервал времени $(0 < t < \infty)$ на промежутки длиной Δt, тогда

$$T_{\Delta t} = \sum_i t_i [\int_0^1 P(x,t_i)dx - \int_0^1 P(x,t_i+\Delta t)dx].$$

При $\Delta t \to 0$ эта сумма переходит в выражение:

$$T = -\int_0^\infty tdt \int_0^1 \frac{\partial P(x,t)dx}{\partial t}. \tag{19}$$

Введем величину $p(t)$ - вероятность частице покинуть интервал (0,1) к моменту $t.$ Очевидно, что

$$p(t) = -\int_0^1 \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} dx, \tag{20}$$

или

$$T = \int_0^\infty dttp(t). \tag{21}$$

Проведя преобразование Фурье над обеими частями уравнения (25), получим:

$$\frac{\partial \widetilde{P}(q,t)}{\partial t} - iqF\widetilde{P}(q,t) - \frac{1}{\kappa}\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{iqx} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0 \frac{P(\xi,t)d\xi}{\left|\xi - x\right|^{\alpha-1}} = 0. \tag{22}$$

$$\int_0^1 \frac{P(\xi,t)d\xi}{\left|\xi - x\right|^{\alpha-1}} = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{P(\xi,t)d\xi}{(\xi - x)^{\alpha-1}}, \quad x<0 \\ \displaystyle\int_0^x \frac{P(\xi,t)}{(x-\xi)^{\alpha-1}} + \int_x^1 \frac{P(\xi,t)d\xi}{(\xi - x)^{\alpha-1}}, \quad 0<x<1 \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{P(\xi,t)d\xi}{(x-\xi)^{\alpha-1}}, \quad 1<x<\infty. \end{cases} \tag{23}$$

С учетом (23) выражение

$$\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{iqx} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^1 \frac{P(\xi,t)d\xi}{\left|\xi - x\right|^{\alpha-1}}$$

приобретает вид:

$$A(t) + B(t)e^{iq} - \left|q\right|^{\alpha} \widetilde{P}(q,t).$$

Подставляя его в (22), получаем уравнение для $\widetilde{P}(q,t)$:

$$\frac{\partial \widetilde{P}(q,t)}{\partial t} - iqF\widetilde{P}(q,t) + \left|q\right|^{\alpha} \widetilde{P}(q,t) = A(t) + e^{iq}B(t), \tag{24}$$

с начальным условием

$$\widetilde{P}(q,0) = e^{ix_0q}. \tag{25}$$

$A(t), B(t)$ выражаются через $P(x,t)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \kappa A(t) &\equiv \frac{\partial}{\partial x}\int_0^1 \frac{P(\xi,t)d\xi}{(\xi - x)^{\alpha-1}}\bigg|_{x=-0} - \frac{\partial}{\partial x}\int_0^1 \frac{P(\xi,t)d\xi}{\left|\xi - x\right|^{\alpha-1}}\bigg|_{x=+0}; \\ \kappa B(t) &= \frac{\partial}{\partial x}\int_0^1 \frac{P(\xi,t)d\xi}{\left|x-\xi\right|^{\alpha-1}}\bigg|_{x=1-0} - \frac{\partial}{\partial x}\int_0^1 \frac{P(\xi,t)d\xi}{(x-\xi)^{\alpha-1}}\bigg|_{x=1+0}. \end{aligned} \tag{26}$$

Проводя преобразование Лапласа над уравнением (24) и используя (25), получаем для образа Фурье-Лапласа выражение:

$$\widetilde{P}(q,s) = \frac{e^{iqx_0} + A(s) + e^{iq}B(s)}{s + \left|q\right|^{\alpha} - iqF}. \tag{27}$$

Граничные условия (16), преобразованные по Лапласу, принимают вид:

$$P(x,s)\big|_{x=0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{P}(q,s)dq = P(x,s)\big|_{x=1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iq}\widetilde{P}(q,s)dq = 0. \qquad (28)$$

Воспользуемся ими для определения неизвестных функций $A(s)$, $B(s)$. Получаем систему уравнений для этих величин:

$$\begin{aligned} A(s)\psi(s,0) + B(s)\psi(s,1) &= -\psi(s,x_0), \\ A(s)\psi(s,-1) + B(s)\psi(s,0) &= -\psi(s,-1+x_0), \end{aligned} \qquad (29)$$

где

$$\psi(s,x) \equiv 2\int_0^{\infty}\frac{dq[(s+q^{\alpha})\cos qx - qF\sin qx]}{(s+q^{\alpha})^2 + F^2q^2}. \qquad (30)$$

Определяя $A(s)$, $B(s)$ из (29), получаем:

$$\begin{aligned} A(s) + e^{iq}B(s) = [\psi^2(s,0) - \psi(s,1)\psi(s,-1)]^{-1}[\psi(s,1)\psi(s,-1+x_0) - \\ -\psi(s,0)\psi(s,x_0) + e^{iq}(\psi(s,-1)\psi(s,x_0) - \psi(s,0)\psi(s,-1+x_0))]. \end{aligned} \qquad (31)$$

Можно показать, что $1 + A(0) + B(0) = 0$. Это следует из соотношения для малых значений s:

$$\begin{aligned} e^{iqx_0} + A(s) + e^{iq}B(s) = e^{iqx_0} - \frac{1}{2}(1+e^{iq}) + \frac{1-e^{iq}}{2}[x_0^{\alpha-1} - (1-x_0)^{\alpha-1}] + \\ + \frac{\alpha\sin\pi/\alpha}{8\pi}s^{1-1/\alpha}[(3-e^{iq})(1-x_0)^{\alpha-1} + (1+e^{iq})(1+x_0^{\alpha-1})], \end{aligned} \qquad (32)$$

если положить в нем $s = 0, \quad q = 0, \quad F = 0.$

Образ Лапласа функции $p(t)$ продифференцируем по s и получим:

$$-\frac{dp(s)}{ds}\bigg|_{s=0} = \int_0^{\infty}tp(t)dt = T.$$

Найдем $p(s)$ с помощью (35).

$$p(t) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{i}{2\pi}\int_{-i\infty}^{i\infty}se^{st}ds\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dq}{q}(1-e^{-iq})\frac{e^{iqx_0} + A(s) + B(s)e^{iq}}{s + |q|^{\alpha} - iqF}.$$

Отсюда видно, что

$$p(s) = -\frac{s}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dq}{q}(1-e^{-iq})\frac{e^{iqx_0} + A(s) + B(s)e^{iq}}{s + |q|^{\alpha} - iqF},$$

$$-\frac{dp(s)}{ds}\bigg|_{s=0} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dq}{q}(1-e^{-iq})\frac{e^{iqx_0} + A + Be^{iq}}{|q|^{\alpha} - iqF}.$$

Здесь $A(0) \equiv A, \quad B(0) \equiv B.$ Положив $F = 0,$ можем записать:

$$\frac{1-e^{-iq}}{2i} = e^{-i\frac{q}{2}}\sin q/2, \quad A + Be^{iq} = -1 + 2iBe^{iq/2}\sin q/2.$$

Действительно,

$$1 + A + Be^{iq} = 1 + A + B + B(e^{iq} - 1), \quad e^{iq} - 1 = 2ie^{iq/2}\sin q/2.$$

Далее

$$\frac{e^{iqx_0} + A + Be^{iq}}{2i} = e^{iqx_0/2}\sin qx_0/2.$$

В итоге получаем:

$$T = \frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{dq}{q^{1+\alpha}}\sin\frac{q}{2}\cdot\sin\frac{qx_0}{2}\cdot\sin\frac{q(1-x_0)}{2},$$

или, после интегрирования:

$$T=\frac{1}{2\alpha\Gamma(\alpha)\sin\frac{\pi}{2}(\alpha-1)}[1-x_0^{\alpha}-(1-x_0)^{\alpha}].$$

Для вероятности пребывания частицы на отрезке (0,1) до момента t $W(t)=\int_0^1 P(x,t)dx$ получаем:

$$W(t)=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{-i\infty}^{i\infty} dse^{st}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dq(1-e^{-iq})}{q}\widetilde{P}(q,s),$$

где $\widetilde{P}(q,s)$ определено формулой (27). Для больших времен $P(q,s)$ определяется с помощью формулы (32). По определению,

$$p(t)=-\frac{dW}{dt}=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-i\infty}^{i\infty} se^{st}ds\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dq(1-e^{-iq})}{q}\frac{e^{iqx_0}+A(s)+B(s)e^{iq}}{s+|q|^{\alpha}-iqF}. \tag{33}$$

Положим $F=0$. Как уже говорилось, большим временам соответствуют малые s, поэтому воспользуемся (32) и представим подынтегральное выражение в (33) следующим образом:

$$\frac{s}{s+Q}[F_1(q)+s^{1-\frac{1}{\alpha}}F_2(q)],\quad Q\equiv|q|^{\alpha},$$

$$F_1(q)=\frac{1-e^{-iq}}{q}\{e^{iqx_0}-\frac{1+e^{iq}}{2}+\frac{1-e^{iq}}{2}[x_0^{\alpha-1}-(1-x_0)^{\alpha-1}]\},$$

$$F_2(q)=\frac{\alpha\sin\pi/\alpha}{8\pi}[(3-e^{iq})(1-x_0)^{\alpha-1}+(1+e^{iq})(1+x_0^{\alpha-1})].$$

Проведем сначала интегрирование по s:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}e^{st}\frac{sds}{s+Q}[F_1(q)+s^{1-\frac{1}{\alpha}}F_2(q)]=e^{-Qt}\{F_2(q)(-Q)^{2-\frac{1}{\alpha}}-QF_1(q)\}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\frac{F_2(q)}{Qt^{3-1/\alpha}}\int_{-i\infty}^{i\infty}dss^{2-1/\alpha}e^{s}.$$

При $q\to 0$ $F_2\to const$, $F_1\sim q$. Оценим первые два слагаемых.

$$\int_0^{\infty}e^{-Qt}Q^{2-\frac{1}{\alpha}}dq=\frac{1}{t^2}\int_0^{\infty}e^{-Q}QdQ,\quad \int_0^{\infty}e^{-Qt}qQdQ=\frac{1}{t^{2/\alpha+1}}\int_0^{\infty}e^{-Q}Q^{2/\alpha}dQ.$$

Как видим, нужно сравнивать быстроту убывания функций $t^{-(3-1/\alpha)}$, $t^{-(3-1/\alpha)}$ и t^{-2}. Поскольку $t^{-2}>t^{-(1+2/\alpha)}, 1<\alpha<2,$ медленнее всех убывает t^{-2}. Это и есть искомая асимптотика.

Вернемся к формуле (26). Уже из уравнения (14) следует, что правые части (26) представляют собой скачки плотности диффузионного потока в точках $x=0,\quad x=1$. Покажем, что эти скачки (и сами плотности) конечны только при условиях (16) или (17). Проведя преобразование Лапласа по времени над обеими частями равенств (26), получим:

$$\begin{aligned}\kappa A(s)&=\frac{\partial}{\partial x}\int_0^1\frac{\widetilde{P}(\xi,s)d\xi}{(\xi-x)^{\alpha-1}}\bigg|_{x=-0}-\frac{\partial}{\partial x}\int_0^1\frac{\widetilde{P}(\xi,s)d\xi}{|\xi-x|^{\alpha-1}}\bigg|_{x=+0},\\ \kappa B(s)&=\frac{\partial}{\partial x}\int_0^1\frac{\widetilde{P}(\xi,s)d\xi}{|x-\xi|^{\alpha-1}}\bigg|_{x=1-0}-\frac{\partial}{\partial x}\int_0^1\frac{\widetilde{P}(\xi,s)d\xi}{(x-\xi)^{\alpha-1}}\bigg|_{x=1+0}.\end{aligned} \tag{34}$$

Рассмотрим слагаемые в правой части первой строки. Воспользуемся Фурье представлением функции $\widetilde{P}(\xi,s)=\frac{1}{2\pi}\int\widetilde{P}(q,s)e^{-iq\xi}dq$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^1 \frac{\tilde{P}(\xi,s)d\xi}{(\xi-x)^{\alpha-1}}\bigg|_{x<0} = \frac{1}{2\pi}\int dq\tilde{P}(q,s)\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-iqx}\int_{-x}^{1-x}\frac{d\eta}{\eta^{\alpha-1}}e^{-iq\eta}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int dq\tilde{P}(q,s)\left\{-iqe^{-iqx}\int_{-x}^{1-x}\frac{d\eta}{\eta^{\alpha-1}}e^{-iq\eta}+\frac{1}{(-x)^{\alpha-1}}-\frac{e^{-iq}}{(1-x)^{\alpha-1}}\right\}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^1 \frac{\tilde{P}(\xi,s)d\xi}{|\xi-x|^{\alpha-1}}\bigg|_{x>0} = \frac{1}{2\pi}\int \tilde{P}(q,s)dq\left\{-iqe^{-iqx}\left(\int_0^x\frac{d\eta e^{iq\eta}}{\eta^{\alpha-1}}+\int_0^{1-x}\frac{d\eta e^{-iq\eta}}{\eta^{\alpha-1}}\right)+\frac{1}{x^{\alpha-1}}-e^{-iq}\right\},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^1 \frac{\tilde{P}(\xi,s)d\xi}{(\xi-x)^{\alpha-1}}\bigg|_{x=-0} - \frac{\partial}{\partial x}\int_0^1 \frac{\tilde{P}(\xi,s)d\xi}{\left|\xi-x^{\alpha-1}\right|}\bigg|_{x=+0} = \frac{1}{2\pi}\int dq\tilde{P}(q,s)\left\{\frac{1}{|x|^{\alpha-1}}-\frac{1}{x'^{\alpha-1}}\right\},\quad x,x'\to 0.$$

Здесь x,x' стремятся к нулю независимо друг от друга. Для того, чтобы $A(s)$ оставалось конечным необходимо, чтобы выполнялось условие $\int\tilde{P}(q,s)dq=0,$ или, что то же, при $P(x,t)\big|_{x=0}=0.$ Аналогичным образом доказываем, что $B(s)$ конечно только при условии $P(x,t)\big|_{x=1}=0,$ или, что то же, при $\int\tilde{P}(q,s)e^{iq}dq=0.$

Формула для времени пребывания частицы на интервале (0,1) получена при условии $F=0.$ Если это условие не выполнено, то не удается получить столь прозрачную зависимость для этой величины. В предельном случае ($F>>1$) для T получаем:

$$T\approx\frac{1-x_0}{F}.$$

Объяснение такой зависимости следующее. При $F>>1$ диффузионное слагаемое, содержащее дробную производную, не играет существенной роли, и его, в нулевом приближении, можно опустить: «работают» только первые производные. Тогда получаем волновое уравнение первого порядка, решением которого является волна, бегущая вправо со скоростью $F.$ Граничное условие $P(x,t)\big|_{x=1}=0$ обеспечивает «прилипание» частицы к правой границе, где она «погибает». Время существования ее равно длине пути, равной $1-x_0,$ деленной на скорость $F.$ Диффузионное слагаемое просто «размывает» бегущую волну.

Приведенное рассуждение, конечно, нельзя считать математически строгим. Вообще говоря, неясно, существует ли точное решение задачи Дирихле для рассматриваемого уравнения на интервале (-1,1) при $F\neq 0.$ Чтобы выяснить это, попытаемся еще раз решить нашу задачу методом разделения переменных.

Запишем нашу задачу в форме:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{L}f-F\frac{\partial f}{\partial x},\quad f(x,t)\big|_{x=\pm1}=0,\quad f(x,t)\big|_{t=0}=f(x),$$
$$\tilde{L}f\equiv\int_{-1}^{1}K(|x-x'|)f(x',t)dx'. \tag{35}$$

Функцию $f(x)$ считаем известной. Ищем решение в виде суперпозиции:

$$f(x,t)=\sum_n f_n(t)\varphi_n(x), \tag{36}$$

где $\varphi_n(x)$ - полная система функций на интервале (-2,+2). Подставляя в уравнение (43), получаем для каждого n:

$$\frac{f_n'(t)}{f_n(t)}=\frac{1}{\varphi_n(x)}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{L}\varphi_n(x)-F\frac{\partial\varphi_n(x)}{\partial x}\right]=-\mu_{n.}. \tag{37}$$

Из уравнения (37) следует, что $f_n(t)=f_n(0)\exp(-\mu_n t).$ Здесь $f_n(0)$ - коэффициенты разложения функции $f(x)$ по полной системе $\varphi_n(x).$ Для $\varphi_n(x)$ выполняется уравнение:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\widetilde{L}\varphi_n(x) - F\frac{\partial}{\partial x}\varphi_n(x) + \mu_n\varphi_n(x) = 0. \tag{38}$$

Представим $\varphi_n(x)$ в виде суммы четной и нечетной части: $\varphi_n(x) = \xi_n(x) + \eta_n(x)$. В этом качестве могут быть взяты $f_n^{(2)}\cos\lambda_n x$ и $f_n^{(1)}\sin\lambda_n x$, где $\lambda_n = n\pi/2$. Поскольку ядро интегрального оператора есть четная функция, оно раскладывается по $\cos\lambda_n x$:

$$K(|x|) = \sum_m b_m \cos\lambda_m x, \quad b_m = \int_0^2 \frac{dx}{x^{\alpha-1}}\cos\lambda_m x. \tag{39}$$

Последний интеграл может быть выражен через вырожденную гипергеометрическую функцию:

$$b_m = \frac{2^{2-\alpha}}{2-\alpha}\operatorname{Re}\{{}_1F_1(2-\alpha, 3-\alpha; 2i\lambda_m)\}.$$

Тогда

$$\widetilde{L}\varphi_n(x) = \sum_m b_m \int_{-1}^{1}\cos\lambda_m(x-x')[\xi_n(x') + \eta_n(x')]dx' =$$

$$= \sum_m b_m\left\{\cos\lambda_m x\cdot\int_{-1}^{1}\cos\lambda_m x'\cdot\xi_n(x')dx' + \sin\lambda_m x\cdot\int_{-1}^{1}\sin\lambda_m x'\cdot\eta_n(x')dx'\right\}.$$

Подставляя в уравнение (38), получаем два уравнения: равенства нулю коэффициентов при $\cos\lambda_m x$ и $\sin\lambda_m x$ для каждого m:

$$\begin{aligned} f_m^{(2)}\left(\mu_m - \lambda_m^2 b_m\right) - F\lambda_m f_m^{(1)} &= 0 \\ F\lambda_m f_m^{(2)} + \left(\mu_m - \lambda_m^2 b_m\right)f_m^{(1)} &= 0. \end{aligned} \tag{40}$$

Для нетривиальности решения необходимо равенство нулю определителя:

$$\left(\mu_m - \lambda_m^2 b_m\right)^2 + \left(F\lambda_m\right)^2 = 0. \tag{41}$$

Из этого уравнения находим μ_m. Для того, чтобы оно было действительным, необходимо чтобы F равнялось нулю. Тогда $\mu_m = \lambda_m^2 b_m$, $\quad f_m(t) = f_m(0)\exp\left(-\lambda_m^2 b_m t\right)$ и решение, соответствующее индексу m:

$$\chi_m(x,t) \equiv f_m(t)\varphi_m(x) = \exp\left(-\lambda_m^2 b_m t\right)\left[f_m^{(2)}\cos\lambda_m x + f_m^{(1)}\sin\lambda_m x\right]. \tag{42}$$

$$f_m^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\lambda_m x dx, \quad f_m^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\lambda_m x dx. \tag{43}$$

При четном m обращается в нуль $\sin\lambda_m x$, а при нечетном - $\cos\lambda_m x$ при $x = \pm 1$. Пусть начальное распределение $f(x) = \delta(x - x_0)$, тогда $f_m^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\lambda_m x_0$, $\quad f_m^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\lambda_m x_0$, и решение

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left(-\lambda_n^2 b_n t\right)\cos\lambda_n(x - x_0). \tag{44}$$

По сути, это функция Грина неоднородного уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{L}f = g(x,t),$$

если в ней заменить t на $t - t'$, а x_0 на x'.

Если $F \neq 0$, $\quad \mu_n = \lambda_n^2 b_n \pm iF\lambda_n$ и $\exp(-\mu_n t) = \exp\left(-\lambda_n^2 b_n t\right)\cdot\left[\cos\lambda_n Ft + \sin\lambda_n Ft\right]$.

Оставляем вещественную часть. Она периодически во времени меняет свой знак и непригодна для плотности вероятности. Итак, пусть $F = 0$.

До сих пор мы нигде не использовали граничные условия $f(x,t)\big|_{x=\pm 1} = 0$. В частности, оно должно выполняться и при $t = 0$, т.е., для $f(x)$

$$\begin{gathered}\sum_n\left[f_n^{(2)}\cos\lambda_n+f_n^{(1)}\sin\lambda_n\right]=0,\\ \sum_n\left[f_n^{(2)}\cos\lambda_n-f_n^{(1)}\sin\lambda_n\right]=0,\end{gathered}\tag{45}$$

или $\sum_n f_n^{(2)}\cos\lambda_n=0,\quad \sum_n f_n^{(1)}\sin\lambda_n=0,$ но из (45) не следует выполнение граничных условий при $t\neq 0,$ поэтому потребуем их выполнения при каждом n: при четном его значении должно быть $f_n^{(2)}=0,$ при нечетном $f_n^{(1)}=0.$ Поэтому можно записать решение так:

$$\begin{gathered}f(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left[-(n+1/2)^2\pi^2 b_{n+1/2}t\right]f_{2m+1}^{(2)}\cos(n+1/2)\pi x+\\ +\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-n^2\pi^2 b_{2n}t\right)f_{2n}^{(1)}\sin n\pi x\end{gathered}\tag{46}$$

Если начальная функция распределения $f(x)=\delta(x-x_0),$ то

$$\begin{gathered}f(x,t)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left[-(n+1/2)^2\pi^2 b_{2n+1}t\right]\cos(n+1/2)\pi x\cdot\cos(n+1/2)\pi x_0+\\ +\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-n^2\pi^2 b_{2n}t\right)\sin n\pi x\cdot\sin n\pi x_0.\end{gathered}\tag{47}$$

Теперь о единственности решения (46) на интервале (-1,1). Казалось бы, что формула (46) и определяет решение, но дело в том, что коэффициенты $f_m^{(1)}, f_m^{(2)}$ определяются через функцию $f(x),$ известную лишь на интервале (-1,1) по формулам (45). На интервалах (-2,-1) и (1,2) ее нужно доопределить. Естественно доопределить ее нулем, что мы и сделаем. Если доопределить ее не нулем, то $f(x)$ можно представить в виде $f(x)+f_1(x),$ где $f_1(x)=0$ при $x\in(-1,1),$ а $f(x)=0$ при $x\in(-2,-1),\quad x\in(1,2).$

Тогда решение будет равно выражению (46) при $x\in(-1,1)$ и $f_1(x)$ при $x\in(-2,-1),\quad x\in(1,2),$ поскольку свертка с нулем дает нуль, а производная от f_1 по времени, в силу уравнения (43), равна нулю, поскольку $\widetilde{L}f_1=0.$ Поэтому решение (46) не зависит от способа доопределения функции $f(x).$ Коэффициенты $f_{2n+1}^{(2)},\quad f_{2n}^{(1)}$ определяются интегралами в пределах от -1 до +1.

Если начальная функция $f(x)=\delta(x-x'),$ то

$$\begin{gathered}f(x,t)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left[-(n+1/2)^2\pi^2 b_{2n+1}t\right]\cos(n+1/2)\pi x\cdot\cos(n+1/2)\pi x_0+\\ +\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-n^2\pi^2 b_{2n}t\right)\sin n\pi x\cdot\sin n\pi x_0.\end{gathered}\tag{48}$$

Если заменить в этой формуле t на $t-t',$ а x_0 на $x',$ то получим функцию Грина неоднородного уравнения, соответствующего задаче Дирихле. Можно ее назвать «проекцией» функции Грина на пространство функций, удовлетворяющих данным краевым условиям.

Пользуясь формулой (48) и выражением для времени T пребывания частицы в интервале (-1,1), можем записать:

$$T\equiv\int_0^{\infty}p(t)t\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos\pi(n+1/2)x_0}{b_{2n+1}\pi^3(n+1/2)^3}.$$

Если ограничиться первым членом ряда, то

$$T=\frac{2^{1+\alpha}\cdot(2-\alpha)}{\pi^3\left(1-\dfrac{\pi^2}{2!}\dfrac{2-\alpha}{4-\alpha}+\ldots\right)}\cos\frac{\pi x_0}{2}.$$

Воспользовавшись формулой (48) для функции Грина можно получить выражение для плотности вероятности $p(x,\tau;x_0)$ первого прохождения точки x в момент τ частицей, впрыснутой в точке x_0 в момент $\tau=0.$ Если $G(x,t;x_0)$ - функция Грина в точке x в момент $t,$ x_0 - точка впрыска в момент $t=0,$ то

$$G(x,t;x_0)=\int_0^t d\tau p(x,\tau;x_0)\cdot G(x,t-\tau;x).$$

Справа стоит свертка. Делая преобразование Лапласа по $t,$ получаем:

$$G(x,s;x_0)=p(x,s;x_0)\cdot G(x,s;x).$$

Определяя $p(x,s;x_0)$ и совершая обратное преобразование по $s,$ получаем:

$$p(x,\tau;x_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}dse^{s\tau}\cdot\frac{G(x,s;x_0)}{G(x,s;x)}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{Re}\left\{e^{is\tau}\cdot\frac{G(x,is;x_0)}{G(x,is;x)}\right\}ds,$$

$$\mathrm{Re}\left\{e^{ist}\cdot\frac{G(x,is;x_0)}{G(x,is;x)}\right\}=\cos s\tau\cdot\mathrm{Re}\frac{G(x,is;x_0)}{G(x,is;x)}-\sin s\tau\cdot\mathrm{Im}\frac{G(x,is;x_0)}{Gx,is;x)}.$$

$$G(x,is;x_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)x\cdot\cos\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)x_0}{\pi^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 b_{2n+1}+is}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\pi nx\cdot\sin\pi nx_0}{\pi^2n^2b_{2n}+is}.$$

Возвращаясь к случаю $F\neq 0,$ следовало бы уточнить утверждение о том, что решение задачи Дирихле в этом случае не существует, фразой: решение не существует при всех $t.$ При достаточно больших временах решение определяется первым слагаемым ряда по косинусам. Оно пропорционально $\cos\frac{1}{2}\pi Ft,$ поэтому, когда Ft становится порядка единицы, оно становится отрицательным. При достаточно больших F это времена порядка $1/F.$ Достаточно большие $F,$ это такие, при которых можно ограничиться членом $F\frac{\partial f}{\partial x}$ в уравнении для f . Обратное преобразованию Лапласа имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\exp(xs)\cdot\varphi(s)ds.$$

Пусть $\varphi(x)$ имеет предел при $s\to 0,$ тогда

$$f(x)=\frac{1}{2\pi ix}\int_{-i\infty}^{i\infty}dse^{s}\cdot\varphi\left(\frac{s}{x}\right),$$

$$\left|\int_{i\infty}^{i\infty}dse^{s\cdot}\varphi\left(\frac{s}{x}\right)\right|=\left|\varphi(0)\cdot 2\sin Nx\right|,$$

Поэтому можно утверждать, что $f(x)$ убывает быстрее чем $\frac{1}{x}$ при $x\to\infty.$ Следуя этому, можем сказать, что $p(x,\tau;x_0)$ убывает с ростом τ не медленней чем $\frac{1}{\tau}.$

Для нахождения предела $\varphi(0)$ необходимо просуммировать ряд для $G(x,is;x_0)$ при $s=0.$ Можно для этого воспользоваться формулой Абеля-Плана, позволяющей выразить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ через контурный интеграл от функции $f(z)$ в комплексной плоскости [13]. После громоздких выкладок убеждаемся в том, что этот предел отличен от нуля.

Если все же $F\neq 0$, но мало, то можно воспользоваться теорией возмущений, переписав уравнение (35) в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{L}f=F\frac{\partial f_0}{\partial x}, \qquad (49)$$

где f_0 - функция Грина уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\right)f_0=0\,.$$

Величину скорости дрейфа F считаем постоянной. Если F велико, то в уравнении для f можно оставить только дрейфовый член, при этом начальное распределение просто переносится со скоростью F. Достаточно большие F - это такие, при которых можно ограничиться членом с первой производной по координате в уравнении для искомой функции. При этом уравнение (17) превращается в волновое уравнение первого порядка, решения которого исследованы в книге [14].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как уже установлено, процесс одномерной аномальной диффузии для случая полубесконечного пространства удается успешно описать дробно-линейным уравнением. Отметим, однако, что до настоящего времени пока не существует строгого доказательства, что такое описание является справедливым и для случая конечного интервала с заданными граничными условиями. В настоящей работе в предположении, что полеты Леви на конечном интервале, адекватно описываются дробно-линейным уравнением супердиффузии, удалось получить его аналитическое решение. Найденное решение позволяет вычислить ряд физических характеристик процесса аномальной диффузии, в частности, следующие: плотность вероятности нахождения частицы в данном интервале, среднее время пребывания частицы в этом интервале и вероятность для частицы покинуть интервал к данному моменту времени. Следует отметить, что решение уравнения супердиффузии на конечном интервале является очень непростой задачей, корректное решение которой до настоящего времени получить не удавалось. Наш поиск решения уравнения аномальной диффузии на конечном интервале в системе собственных функций операторов не привел к результату, поэтому в настоящей работе реализован иной подход. Решение уравнения удалось получить в терминах произвольной ортогональной системы функций. Такое представление решения, возможно, является удачным, так как открывает дополнительные возможности для исследований систем с аномальной диффузией в различных практических приложениях.

Авторы выражают благодарность А.В. Чечкину за полезное обсуждение статьи.

REFERENCES

1. Metzler R., Chechkin A.V., Klafter J. Levy Statistics and Anomalous Transport: Levy Flights and Subdiffusion. In: Encyclopedia of Complexity and System Science, edited by R. Mayers. Springer Science + Business Media, LLC, New York, 2009. - P. 1724-1745.
2. Mohammed A.M.S., Koh Y.R., Vermeersch B., Lu H., Burke P.G., Gossard A.C., and Shakouri A. Fractal Lévy Heat Transport in Nanoparticle Embedded Semiconductor Alloys // Nano Lett. – 2015. - Vol. 15. – No 7. – P. 4269–4273.
3. Chechkin A., Metzler R., Klafter J., Gonchar V. Introduction to the Theory of Levy Flights. In: R. Klages, G. Radons, I.M. Sokolov (Eds), Anomalous Transport: Foundations and Applications, Wiley-VCH, Weinheim, 2008. - P. 129 - 162.
4. Zolotarev V.M., Uchajkin V.V., Saenko V.V. Superdiffuzija i ustojchivje zakony // ZhETF. – 1999. - Tom. 115. - Vyp. 4. - S. 1411-1425. (in Russian)
5. Gitterman M. Mean first passage time for anomalous diffusion // Phys. Rev. E. – 2000. - Vol. 62. - P. 6065-6070.
6. Titchmarsh E.Ch. Vvedenie v teoriju integralov Fur'e. Moskva-Leningrad: OGIZ, 1948. – 418 s. (in Russian)
7. Smirnov V.I. Kurs vysshej matematiki. Tom 4. Moskva-Leningrad: GITTL, 1951. – 804 s. (in Russian)
8. Gakhov F.D. Kraevye zadachi. Moskva: Gos. izd. fiz.-mat. lit., 1958. – 545 s. (in Russian)
9. Sokhotskiy Yu.V. Ob opredelennykh integralakh i funktsiyakh, upotrebljaemykh pri razlozhenijakh v rjady. Sankt-Peterburg, 1873. (in Russian)
10. Metzler R., Chechkin A.V., Gonchar V.Yu., Klafter R. Some fundamental aspect of Levy flights // Chaos, Solutions and Fractals. – 2007. – Vol. 34. – P. 129-142.
11. Uizem J. Linejnye i nelinejnye volny. - Moskva: Izdatel'stvo Mir, 1977. – 624 s. (in Russian)
12. Gradshtejn I.S., Ryzhyk I.M. Tablitsy integralov, summ, rjadov i proizvedenij. 4-e izd. – Moskva: Fizmatgiz, 1963. - 1100 s. (in Russian)
13. Zumofen G., Klafter J. Absorbing boundary in one-dimensional anomalous transport // Phys. Rev. E. – 1995. - Vol. 51. - P. 2805-2814.
14. Evgrafov M.A. Analiticheskie funktsii. - Moskva: Izdatel'stvo «Nauka», 1968. – 471 s. (in Russian)