

PACS: 67.85.Fg

ON THE VORTEX STRUCTURE IN TWO COMPONENT BOSE-EINSTEIN CONDENSATE

A.P. Ivashin*, Yu.M. Poluektov**

National Science Centre "Kharkov institute of physics and technology"

* E-mail: ivashin@kipt.kharkov.ua.

** E-mail: yuripoluektov@kipt.kharkov.ua

Received September 4, 2014

The vortex structure in a space-homogeneous Bose-Einstein condensate of two particle species with different masses has been studied. It is shown that the vortex structure in the two-component condensate is described by three dimensionless parameters, which define the system. That is different from the usual one-component condensate, where the vortex is described by a parameter-less dimensionless equation with a fixed structure. A few types of vortices with different qualitative structure are explored. In particular, it is shown, that the vortex structure strongly depends on the sign of "interaction" constant of the components. There can exist the super-density vortices, when the "interaction" constant is positive. These vortices have the near-axis density greater than the equilibrium density of a homogeneous space Bose-Einstein condensate. We show that there can exist the vortices with opposite direction of the condensate rotation near the axis and far off the axis.

KEY WORDS: Bose Einstein multi-component condensate, Gross-Pitaevskii equations, quantum vortex

ПРО СТРУКТУРУ ВИХРІВ У ДВОХКОМПОНЕНТНОМУ БОЗЕ-ЕЙНШТЕЙНІВСЬКОМУ КОНДЕНСАТІ

А.П. Івашин, Ю.М. Полуктов

Національний науковий центр "Харківський фізико-технічний інститут"

61108, м. Харків, вул. Академічна, 1

Досліджено структуру вихрів у просторово-однорідному бозе - ейнштейнівському конденсаті частинок двох сортів з різними масами. Показано, що у двохкомпонентному випадку структура вихра визначається трьома безрозмірними параметрами, що характеризують систему. Це суттєво відрізняється від звичайного однокомпонентного випадку, де вихор описується рівнянням, яке у безрозмірній формі взагалі не містить параметрів системи, а тому його структура незмінна. Вивчено деякі типи вихрів з якісно відмінною структурою. Зокрема, показано, що структура вихра істотно залежить від знака постійної "взаємодії" компонент. При позитивному значенні цієї постійної можуть існувати "вихри з підвищеною густиною". У таких вихрів густина поблизу осі вихра більше за рівноважну густину просторово-однорідного конденсату. Показано, що можуть існувати вихри, у яких конденсат поблизу осі і на великих відстанях від осі вихра обертається в протилежні сторони.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: бозе - ейнштейнівській багатокомпонентний конденсат, рівняння Гросса - Пітаєвського, квантований вихор

О СТРУКТУРЕ ВИХРЕЙ В ДВУХКОМПОНЕНТНОМ БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКОМ КОНДЕНСАТЕ

А.П. Ивашин*, Ю.М. Полуктов**

Национальный научный центр "Харьковский физико-технический институт"

61108, г. Харьков, ул. Академическая, 1

Исследована структура вихрей в пространственно-однородном бозе-эйштейновском конденсате частиц двух сортов с различными массами. Показано, что в двухкомпонентном случае структура вихря определяется тремя безразмерными параметрами, характеризующими систему. Это существенно отличается от обычного однокомпонентного случая, где вихрь описывается уравнением, которое в безразмерной форме вообще не содержит параметров системы, а потому его структура неизменна. Изучены некоторые типы вихрей с качественно различающейся структурой. В частности, показано, что структура вихря существенно зависит от знака постоянной «взаимодействия» компонент. При положительном значении этой постоянной могут существовать «вихри с уплотнением». У таких вихрей плотность вблизи оси вихря превосходит равновесную плотность пространственно-однородного конденсата. Показано, что могут существовать вихри, у которых конденсат вблизи оси и на больших расстояниях от оси вихря вращается в противоположные стороны.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: бозе-эйштейновский многокомпонентный конденсат, уравнения Гросса-Питаевского, квантованный вихрь

В работах [1,2] была исследована квантованная вихревая нить в слабонеидеальном бозе-газе. Структура этого вихря такова, что на оси вихря плотность бозе-эйштейновского конденсата (БЭК) обращается в ноль и монотонно возрастает до равновесного значения плотности пространственно-однородной системы. Характерное расстояние, на котором меняется плотность вблизи оси вихря, определяется корреляционной длиной, зависящей от массы частицы, равновесной плотности и постоянной межчастичного взаимодействия. Корреляционная длина определяет размер сердцевин вихря. Уравнение, описывающее вихрь в однокомпонентной системе, если его записать в безразмерной форме, является универсальным и не содержит никаких параметров, характеризующих систему [3], а, следовательно, структура вихрей во всех

однокомпонентных системах одинакова. Влияние эффектов нелокальности на структуру вихря рассматривалось в [4].

Создание БЭК в атомных газах щелочных элементов, удерживаемых в магнитных или лазерных ловушках [5-8], позволило получить и экспериментально изучать вихри в пространственно-неоднородных условиях [9-13]. Исследовались не только однокомпонентные системы, но была реализована возможность создавать конденсаты смеси двух или нескольких сортов частиц и вихревые состояния в таких более сложных системах [11-13]. Хотя двухкомпонентные БЭК в ловушках и вихри в них изучались теоретически [7,8,14-18], но детальный анализ структуры вихря в таких системах в зависимости от характеристик среды, насколько известно авторам, отсутствует для пространственно-однородного случая.

Целью данной работы является исследование структуры вихрей в пространственно-однородном бозе-эйнштейновском конденсате частиц двух сортов с различными массами. Показано, что в этом двухкомпонентном случае структура вихря зависит от трех безразмерных параметров. Изменение плотностей каждой из компонент, суммарной плотности, а также плотности потока массы в зависимости от расстояния до оси вихря определяется значениями этих параметров. Обращается внимание, что рассмотренная система существенно отличается от однокомпонентного случая, где вихрь описывается универсальным нелинейным уравнением, которое в безразмерной форме вообще не содержит характеристик системы [1-3]. Изучены некоторые возможные, качественно различные структуры вихрей при различных наборах параметров, характеризующих двухкомпонентный конденсат. Показано, что структура вихря существенно зависит от знака постоянной «взаимодействия» компонент. В частности, при положительном значении постоянной взаимодействия, оказывается возможными существование своеобразных «вихрей с уплотнением». В таких вихрях полная плотность вблизи оси может превосходить равновесную плотность пространственно-однородного конденсата, что невозможно в однокомпонентном случае. Показано также, что могут существовать вихри, у которых конденсат вблизи оси и на больших расстояниях от оси вихря вращается в противоположные стороны.

В статье система уравнений Гросса-Питаевского (ГП) для двухкомпонентного БЭК представлена в безразмерной симметричной форме. Система содержит пять безразмерных параметров, из которых только три параметра являются независимыми. Далее уравнения ГП для модулей макроскопических волновых функций записаны в цилиндрической системе координат при наличии вихревого движения с двумя квантованными циркуляциями. Исследована асимптотика решений на больших расстояниях от оси вихря. Показано, что решения уравнений могут стремиться к своему асимптотическому значению как «сверху», так и «снизу», так что при определенных условиях полная плотность вблизи оси вихря может быть больше равновесной плотности на бесконечности. Некоторые, качественно различные структуры вихря при различных наборах параметров, описывающих систему, изучены численно. Рассмотрены случаи, когда отлична от нуля циркуляция только одной из компонент и когда не равны нулю обе циркуляции. Проанализировано распределение плотности потока массы в вихревой нити.

УРАВНЕНИЯ ГРОССА-ПИТАЕВСКОГО ДЛЯ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЫ

Бозе-эйнштейновский конденсат состоящий из частиц двух сортов с массами m_1, m_2 и плотностями n_1, n_2 описывается стационарными уравнениями Гросса-Питаевского для макроскопических волновых функций $\Phi_1(\mathbf{r}), \Phi_2(\mathbf{r})$ [7,8]

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m_1} \Delta \Phi_1(\mathbf{r}) + g_{11} \Phi_1(\mathbf{r}) |\Phi_1(\mathbf{r})|^2 + g_{12} \Phi_1(\mathbf{r}) |\Phi_2(\mathbf{r})|^2 &= \mu_1 \Phi_1(\mathbf{r}), \\ -\frac{\hbar^2}{2m_2} \Delta \Phi_2(\mathbf{r}) + g_{22} \Phi_2(\mathbf{r}) |\Phi_2(\mathbf{r})|^2 + g_{21} \Phi_2(\mathbf{r}) |\Phi_1(\mathbf{r})|^2 &= \mu_2 \Phi_2(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1)$$

Число частиц каждого сорта определяется соотношениями

$$N_i = \int |\Phi_i(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}, \quad (i=1,2). \quad (2)$$

В дальнейшем будем пользоваться индексами $i, k=1,2$ для обозначения сортов частиц и компонент конденсата. В комплексных функциях можно выделить модули ρ_i и фазы χ_i , записав их в виде $\Phi_i(\mathbf{r}) = \rho_i(\mathbf{r}) \exp[i\chi_i(\mathbf{r})]$. Тогда плотности числа частиц $n_i(\mathbf{r})$ и скорости $\mathbf{v}_i(\mathbf{r})$ каждой компоненты выражаются через модуль и фазу

$$n_i(\mathbf{r}) = \rho_i^2(\mathbf{r}), \quad \mathbf{v}_i(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{m_i} \nabla \chi_i(\mathbf{r}). \quad (3)$$

В пространственно-однородном состоянии химические потенциалы μ_1, μ_2 связаны с равновесными плотностями

$$\mu_1 = g_{11} n_{10} + g_{12} n_{20}, \quad \mu_2 = g_{22} n_{20} + g_{21} n_{10}. \quad (4)$$

Будем предполагать выполненными условия устойчивости пространственно-однородного состояния системы [7,8]

$$g_{11} > 0, \quad g_{22} > 0, \quad g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0. \quad (5)$$

Удобно перейти к безразмерным функциям $\psi_1 = \Phi_1/\sqrt{n_{10}}$, $\psi_2 = \Phi_2/\sqrt{n_{20}}$. Определим длины когерентности для первой и второй компоненты конденсата соотношениями

$$\xi_1 \equiv \frac{\hbar}{\sqrt{2m_1g_{11}n_{10}}}, \quad \xi_2 \equiv \frac{\hbar}{\sqrt{2m_2g_{22}n_{20}}}. \quad (6)$$

и введем эффективную длину когерентности $\xi = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$, с помощью которой определим безразмерные координаты $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/\xi$, так что $\Delta = \xi^{-2}\tilde{\Delta}$. В дальнейшем значок тильды будем опускать. В безразмерной форме система уравнений (1) принимает вид

$$\begin{aligned} -\Delta\psi_1(\mathbf{r}) + A_1(|\psi_1(\mathbf{r})|^2 - 1)\psi_1(\mathbf{r}) + uB_1(|\psi_2(\mathbf{r})|^2 - 1)\psi_1(\mathbf{r}) &= 0, \\ -\Delta\psi_2(\mathbf{r}) + A_2(|\psi_2(\mathbf{r})|^2 - 1)\psi_2(\mathbf{r}) + uB_2(|\psi_1(\mathbf{r})|^2 - 1)\psi_2(\mathbf{r}) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Система уравнений (7) записана в симметричной форме и содержит пять безразмерных коэффициентов: A_1, A_2, B_1, B_2 и $u \equiv g_{12}/\sqrt{g_{11}g_{22}}$. Коэффициенты A_i, B_i не являются независимыми, а выражаются через два безразмерных положительных параметра, один из которых определяется отношением длин когерентности $\zeta^2 \equiv (\xi_2/\xi_1)^2$, а второй выражается через отношение плотностей и постоянных взаимодействия в каждой из компонент $\eta \equiv (n_{20}/n_{10})\sqrt{g_{22}/g_{11}}$. Таким образом, решения системы уравнений (1) зависят от трех независимых безразмерных параметров, в качестве которых выберем величины

$$\zeta^2 \equiv \left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^2, \quad \eta \equiv \frac{n_{20}}{n_{10}}\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}, \quad u = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}. \quad (8)$$

Первые два параметра в (8) положительны, а для третьего, в силу условий (5) справедливо неравенство $u^2 < 1$. Коэффициенты в уравнениях (7) через параметры (8) выражаются формулами

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv 1 + \zeta^2, & A_2 &\equiv 1 + \zeta^{-2}, \\ B_1 &\equiv A_1\eta, & B_2 &\equiv A_2\eta^{-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Следует подчеркнуть, что в отличие от однокомпонентного случая, где уравнение в безразмерной форме не содержит параметров среды и является универсальным, в двухкомпонентном конденсате коэффициенты системы уравнений определяются тремя безразмерными независимыми параметрами (8). В зависимости от величины этих коэффициентов вихрь, как будет показано, может иметь различную структуру.

УРАВНЕНИЯ ГРОССА-ПИТАЕВСКОГО ДЛЯ ВИХРЯ

Будем искать симметричные относительно оси z решения системы уравнений (7) в виде $\psi_i(r, \phi) = f_i(r)\exp[i\chi_i(\phi)]$, где r, ϕ - цилиндрические координаты. Для такой функции скорости компонент имеют вид

$$\mathbf{v}_i = \frac{\hbar}{m_i r} \frac{d\chi_i(\phi)}{d\phi} \mathbf{e}_\phi, \quad (10)$$

где \mathbf{e}_ϕ - единичный вектор, направленный по касательным к окружностям с центром на оси z .

Для функций $f_i(r)$ из (7) получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 f_1}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{df_1}{dr} + \frac{l_1^2}{r^2} f_1 + A_1(f_1^2 - 1)f_1 + uB_1(f_2^2 - 1)f_1 &= 0, \\ -\frac{d^2 f_2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{df_2}{dr} + \frac{l_2^2}{r^2} f_2 + A_2(f_2^2 - 1)f_2 + uB_2(f_1^2 - 1)f_2 &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Будем изучать решения этих уравнений при следующих граничных условиях: при $l_i^2 \geq 1$ полагаем $f_i(0) = 0$ и $f_i(\infty) = 1$, а при $l_i = 0$ полагаем $(df_i/dr)(0) = 0$, $f_i(\infty) = 1$.

Полная плотность числа частиц в вихре

$$n(r) = n_{10}f_1^2(r) + n_{20}f_2^2(r). \quad (12)$$

Вдали от оси вихря полная плотность числа частиц равна равновесной плотности $n(\infty) \equiv n_0 = n_{10} + n_{20}$. Фаза

макроскопической волновой функции выбирается в виде $\chi_i(\phi) = l_i \phi$, где $l_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Знак величины l_i определяет направление вращения вихря. В двухкомпонентной системе с вихревым движением в каждой из компонент может быть связана своя квантованная циркуляция:

$$\Gamma_i \equiv \oint \mathbf{v}_i \cdot d\mathbf{l} = \frac{2\pi \hbar l_i}{m_i}. \quad (13)$$

Интересной особенностью двухкомпонентного конденсата является возможность существования вихря только в одной из компонент, тогда как в другой компоненте движение остается безвихревым и в этой компоненте циркуляция равна нулю. Этой ситуации отвечают наборы чисел $l_1 = \pm 1$ и $l_2 = 0$, либо $l_1 = 0$ $l_2 = \pm 1$. Еще одна существенная особенность проявляется в возможности вращения компонент в противоположных направлениях, чему, например, соответствует набор чисел $l_1 = +1$ и $l_2 = -1$. Плотность потока массы в вихревой нити двухкомпонентного конденсата определена соотношением

$$\mathbf{J} = \frac{\hbar}{r} [l_1 n_{10} f_1^2(r) + l_2 n_{20} f_2^2(r)] \mathbf{e}_\phi \equiv J_\phi(r) \mathbf{e}_\phi. \quad (14)$$

С учетом этого, угловой момент вихря $\mathbf{L} = \int [\mathbf{r} \times \mathbf{J}] d\mathbf{r}$ в двухкомпонентном БЭК дается формулой

$$\mathbf{L} = \hbar (l_1 N_1 + l_2 N_2) \mathbf{e}_z, \quad (15)$$

где \mathbf{e}_z - орт вдоль оси вихря, а $N_i = 2\pi n_{i0} L_v \int_0^\infty f_i^2(r) r dr$ - полное число частиц сорта i , L_v - длина вихря.

Обратим внимание, что распределение плотностей компонент не зависит от знака циркуляции, а угловой момент (15), естественно, от него зависит. Если вращение компонент противоположное, то при выполнении условия $l_1 n_{10} + l_2 n_{20} = 0$ полный момент вращения вихря обращается в ноль.

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ВИХРЯ НА БОЛЬШИХ РАССТОЯНИЯХ

Рассмотрим асимптотику решений уравнений (11). На больших расстояниях $r \gg 1$ решения уравнений

(11) имеют вид $f_i \approx 1 + \frac{a_i}{r^2}$, где

$$a_1 = -\frac{(l_1^2 A_2 - u \eta l_2^2 A_1)}{2A_1 A_2 (1-u^2)}, \quad a_2 = -\frac{(l_2^2 A_1 - u \eta^{-1} l_1^2 A_2)}{2A_1 A_2 (1-u^2)}. \quad (16)$$

Знаменатель в этих формулах всегда положителен, а числитель может иметь разный знак. В зависимости от знака параметра a_i модуль макроскопической волновой функции к своему равновесному значению на бесконечности равному единице может приближаться либо со стороны больших («сверху»), либо со стороны меньших («снизу») значений. Очевидно, что если $u < 0$, то оба параметра a_i отрицательны. Если же $u > 0$, то возможна ситуация, когда один из этих параметров положителен, а другой – отрицателен. Пусть вначале $l_1^2 > 0$ и $l_2^2 > 0$. Тогда при $u > 0$ могут реализовываться следующие случаи:

- 1) если $A_2/A_1 < u \eta (l_2^2/l_1^2)$, то $a_1 > 0$, $a_2 < 0$,
- 2) если $u \eta (l_2^2/l_1^2) < A_2/A_1 < u^{-1} \eta (l_2^2/l_1^2)$, то $a_1 < 0$, $a_2 < 0$,
- 3) если $A_2/A_1 > u^{-1} \eta (l_2^2/l_1^2)$, $a_1 < 0$, $a_2 > 0$.

Если же у одной из компонент, например у второй, циркуляция отсутствует $l_2 = 0$, то $a_1 = -l_1^2 A_2 / 2A_1 A_2 (1-u^2)$, $a_2 = u \eta^{-1} l_1^2 A_2 / 2A_1 A_2 (1-u^2)$. В этом случае всегда $a_1 < 0$, а знак a_2 может быть как положительным, так и отрицательным и совпадает со знаком постоянной взаимодействия между компонентами $u = g_{12} / \sqrt{g_{11} g_{22}}$.

Поведение полной плотности на больших расстояниях, согласно (12), (16) определяется формулой

$$\frac{n(r)}{n_0} = 1 + \frac{2a_D}{n_0 r^2}, \quad (17)$$

где

$$a_D = a_1 n_{10} + a_2 n_{20} = -\frac{[(n_{10} l_1^2 A_2 + n_{20} l_2^2 A_1) - u (n_{10} \eta l_2^2 A_1 + n_{20} \eta^{-1} l_1^2 A_2)]}{2A_1 A_2 (1-u^2)}. \quad (18)$$

Параметр a_D (18) обращается в ноль при $u = u_*$, где

$$u_* = \frac{(n_{10}l_1^2 A_2 + n_{20}l_2^2 A_1)}{(n_{20}\eta^{-1}l_1^2 A_2 + n_{10}\eta l_2^2 A_1)}. \quad (19)$$

Если положительный параметр $u_* > 1$, то при любых допустимых значениях u всегда $a_D < 0$ и, следовательно, полная плотность к своему равновесному значению на бесконечности подходит «снизу». Интересная возможность возникает, если $u_* < 1$. В этом случае возможна ситуация, когда $u > u_*$ и $a_D > 0$. Это означает, что полная плотность к своему равновесному значению на бесконечности подходит «сверху», т.е. плотность вблизи оси вихря оказывается больше равновесной плотности на бесконечности. Подчеркнем, что возможность существования таких «вихрей с уплотнением» вблизи сердцевин является особенностью именно многокомпонентного конденсата.

Когда во второй компоненте циркуляция отсутствует $l_2 = 0$, то a_D имеет простой вид

$$a_D = \frac{l_1^2 (n_{10} - u\eta^{-1}n_{20})}{2A_1(1-u^2)}. \quad (20)$$

При выполнении условия $n_{10} > u\eta^{-1}n_{20}$, которое с учетом определений (8) эквивалентно условию $g_{22} > g_{12}$, коэффициент (20) положителен. В этом случае полная плотность вблизи оси вихря оказывается больше равновесного значения плотности на бесконечности.

СТРУКТУРА ВИХРЯ ПРИ РАЗНЫХ ЗНАКАХ ПОСТОЯННОЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КОМПОНЕНТ

Исследуем численно структуру вихря при разных знаках и величине параметра u , определяющего «взаимодействие» компонент БЭК. Рассмотрим вначале случай, когда вихревое движение во второй компоненте отсутствует, так что $l_2 = 0$. Положим при численных расчетах, что $\zeta = \eta = 1$, следовательно, $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 2$, и $u_* = n_{10} / n_{20}$ (19). Параметр межкомпонентного взаимодействия может меняться в интервале $-1 < u < 1$.

Численные решения уравнений (11) и поведение полной плотности в зависимости от расстояния до оси вихря при $u = \pm 0,9$ показаны на рисунке 1.

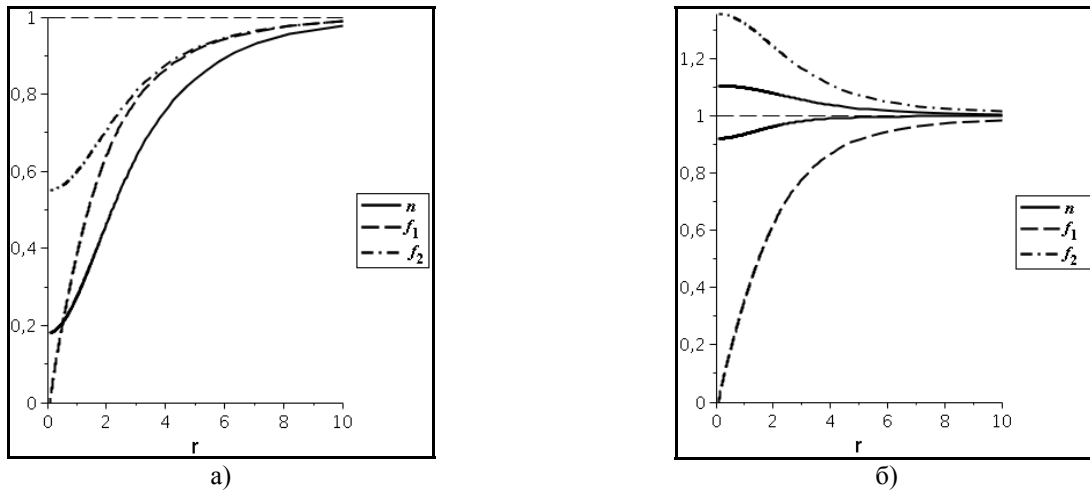


Рис.1. Решения уравнений ГП $f_1(r)$ (при $l_1^2 = 1$), $f_2(r)$ (при $l_2 = 0$) и полная плотность $n(r)$: а) $u = -0,9$; б) $u = 0,9$. Верхняя сплошная кривая показывает поведение полной плотности при $u_* = n_{10} / n_{20} = 2/3 < 0,9$, нижняя – при $u_* = n_{10} / n_{20} = 1 > 0,9$.

На рис. 1а представлены решения уравнений (11) и поведение полной плотности при $u = -0,9$, $u_* = n_{10} / n_{20} = 2/3$. В этом случае модуль макроскопической волновой функции компоненты с вихрем, на оси обращается в ноль, а у компоненты, где вихрь отсутствует, он принимает конечное значение меньше единицы. Волновые функции обеих компонент и относительная полная плотность монотонно возрастают с расстоянием, приближаясь к равновесным значениям. Полная плотность на оси такого вихря, в отличие от обычного вихря однокомпонентного БЭК, не обращается в нуль.

На рис. 1б показаны аналогичные зависимости при $u = 0,9$. Здесь, в отличие от предыдущего случая, величина модуля волновой функции компоненты без вихревого движения, на оси вихря больше ее значения на бесконечности, и она монотонно убывает с увеличением расстояния, приближаясь к единице сверху. Модуль волновой функции компоненты с вихревым движением монотонно возрастает с расстоянием от нуля до

равновесного значения. Поведение полной плотности в данном случае может быть различным: при $u > u_*$ она монотонно убывает от значения, большего равновесного (верхняя сплошная кривая на рис. 1б), а при $u < u_*$ плотность монотонно возрастает от конечного значения на оси, меньшего единицы (нижняя сплошная кривая на рис. 1б). Полученные численно вихревые решения с конечной плотностью на оси, и вихревые решения у которых плотность на оси больше равновесной, качественно отличны от обычных вихрей в однокомпонентном БЭК.

Численный расчет для меньших по абсолютной величине постоянных взаимодействия $|u|$ показывает, что в этом случае качественно поведение решений уравнения ГП и полной плотности не меняется. С ослаблением взаимодействия между компонентами, распределение модуля волновой функции в безвихревой компоненте становится более равномерным, приближаясь к однородному распределению $f_2 = 1$.

Перейдем к рассмотрению случая, когда с вихрем связаны две циркуляции, полагая $l_1^2 = l_2^2 = 1$. При численных расчетах, как и выше, полагаем что $\zeta = 1$, а параметр η может иметь произвольное положительное значение. Следовательно, $A_1 = A_2 = 2$ и $B_1 = 2\eta$, $B_2 = 2\eta^{-1}$. Параметр межкомпонентного взаимодействия по-прежнему может меняться в интервале $-1 < u < 1$. Здесь, как и в рассмотренном выше случае, возможны ситуации, когда плотности компонент к своим равновесным значениям на бесконечности будут подходить «снизу» и «сверху» в зависимости от знака постоянных a_i в (16). Возможны следующие случаи:

- 1) при $u > \eta$ имеем $a_1 < 0, a_2 > 0$; 2) при $\eta > 1/u$ имеем $a_1 > 0, a_2 < 0$; 3) при $u < \eta < 1/u$ имеем $a_1 < 0, a_2 < 0$.

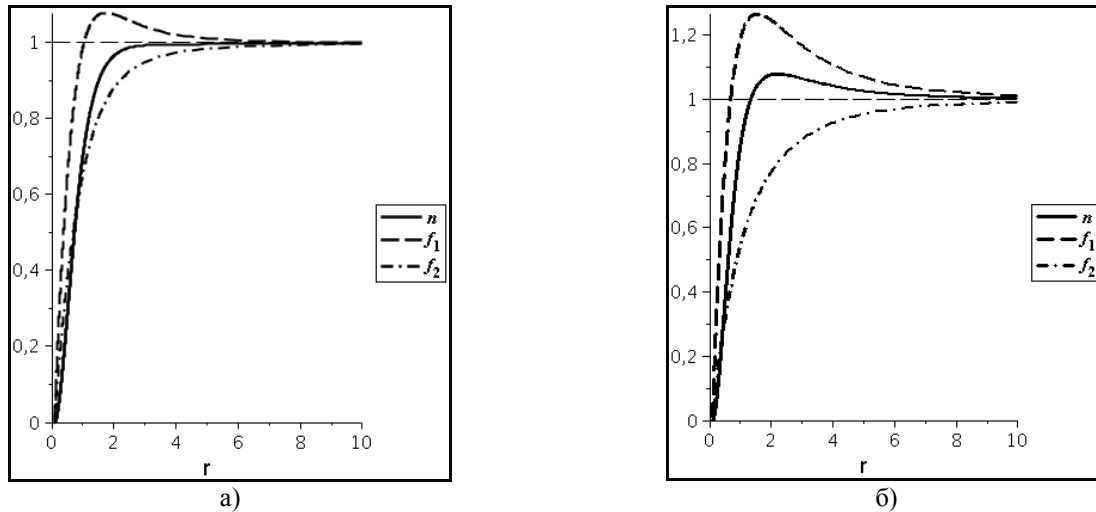


Рис.2. Решения уравнений ГП $f_1(r)$, $f_2(r)$ и полная плотность $n(r)$ при $l_1^2 = l_2^2 = 1$:
а) $u = 0,7$, б) $u = 0,9$. ($\zeta = 1, \eta = 2, u_* = 0,8, n_{10} = n_{20}$).

На рис. 2 приведены зависимости решений уравнений ГП при параметрах, когда одно из решений стремится к значению на бесконечности «снизу», а другое – «сверху». Если параметр u меньше критического значения u_* (19) (рис. 2а), то полная плотность монотонно возрастает с увеличением расстояния до оси. Если же $u > u_*$, то реализуется структура вихря, качественно отличная от структуры вихря в однокомпонентном случае (рис. 2б). Плотность от нулевого значения на оси возрастает до некоторого максимального значения, превосходящего плотность на бесконечности, а затем она монотонно убывает с расстоянием до равновесной плотности. В этом случае вихрь представляет собой своеобразную трубку, почти пустую внутри, ограниченную плотной стенкой. Таким образом, показано, что могут существовать два типа «вихрей с уплотнением». В одном случае плотность на оси вихря превосходит равновесную, монотонно убывая с расстоянием (рис. 1б). В другом случае, при равной нулю плотности на оси, плотность достигает максимального значения, большего равновесного, на некотором расстоянии порядка корреляционной длины (рис. 2б).

ПЛОТНОСТЬ ПОТОКА МАССЫ В ВИХРЕВОЙ НИТИ

Представляет интерес рассмотреть изменение с расстоянием от оси вихря плотности потока массы, определенной формулой (14), которую удобно записать в безразмерном виде

$$\frac{J_\varphi(r)}{J_{\varphi 0}} = \frac{1}{r} \left[l_1 \frac{n_{10}}{n_0} f_1^2(r) + l_2 \frac{n_{20}}{n_0} f_2^2(r) \right], \tag{21}$$

где $J_{\varphi 0} = \hbar n_0 / \xi$. При $r \ll 1$ и $l_1^2 \neq 0, l_2^2 \neq 0$ решения уравнений (11) обращаются в нуль по закону

$f_1 \approx C_1 r$, $f_2 \approx C_2 r$. Учитывая это, а также то, что при $r \gg 1$ имеем $f_1 \approx f_2 \approx 1$, находим выражения для плотности потока массы на малых и больших расстояниях:

$$\frac{J_\varphi(r)}{J_{\varphi 0}} \approx \gamma_0 r, \quad (r \ll 1); \quad \frac{J_\varphi(r)}{J_{\varphi 0}} \approx \frac{\gamma_\infty}{r}, \quad (r \gg 1). \quad (22)$$

Направления вращения вблизи оси вихря и на больших расстояниях определяются знаками коэффициентов

$$\gamma_0 \equiv l_1 \frac{n_{10}}{n_0} C_1^2 + l_2 \frac{n_{20}}{n_0} C_2^2, \quad \gamma_\infty \equiv l_1 \frac{n_{10}}{n_0} + l_2 \frac{n_{20}}{n_0}. \quad (23)$$

Коэффициенты C_1, C_2 аналитически рассчитаны быть не могут, но численные расчеты показывают, что при противоположных знаках l_1 и l_2 коэффициенты (23) могут иметь разный знак. Это означает, что в таком случае конденсат в вихре вблизи оси и на больших расстояниях вращается в противоположные стороны. На рис. 3 показаны зависимости плотности потока массы в вихре от расстояния до его оси.

Сплошная кривая отвечает случаю, когда знаки l_1 и l_2 одинаковы. В этом случае распределение потока массы качественно не отличается от распределения в однокомпонентном БЭК (точечная кривая). Наиболее интересен случай, когда знаки l_1 и l_2 противоположны. Зависимости плотности потока массы в вихре от расстояния до его оси в этом случае показаны штриховыми линиями. Зависимости на рисунке 3а рассчитаны для набора параметров: $n_{10}/n_{20} = 3/2$, $\zeta = \sqrt{3/2}$, $\eta = 4/3$, $u = 0,7$. В этом случае вращение конденсата на любом расстоянии от оси происходит в одну сторону. При наборе параметров $n_{10}/n_{20} = 2/3$, $\zeta = \sqrt{2/3}$, $\eta = 3$, $u = 0,7$, реализуется ситуация, при которой вращение конденсата вблизи оси вихря и на больших расстояниях направлено в противоположные стороны (рис. 3б).

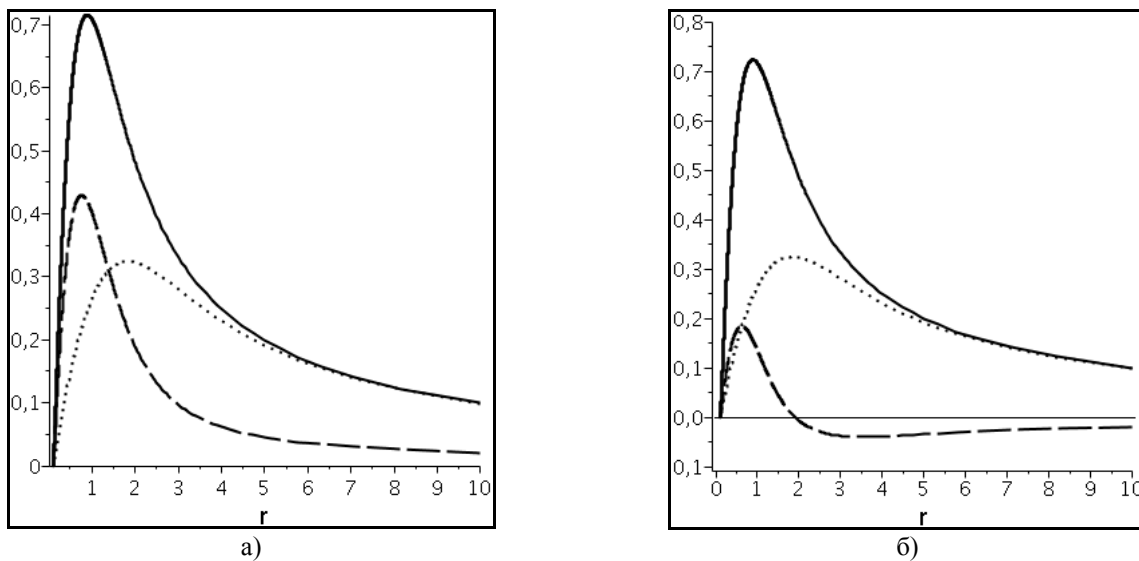


Рис.3. Полные плотности потока массы как функции расстояния до оси вихря. По оси ординат отложена величина $J_\varphi(r)/J_{\varphi 0}$, где $J_{\varphi 0} = \hbar n_0 / \xi$. Сплошные кривые отвечают одинаковым знакам l_1 и l_2 , а штриховые кривые - различным.

На рисунке б) показан случай перемены направления вращения в вихре. Точечная кривая относится к обычному однокомпонентному случаю.

Отметим, что некоторые эффекты в квантованных вихрях с противоположным вращением в двухкомпонентном конденсате в атомарных газах исследовались также в недавней работе [19].

ВЫВОДЫ

В однокомпонентном БЭК структура вихря универсальна и не зависит от характеристик среды. Имеет место своеобразный закон соответственных состояний, состоящий в том, что уравнение для вихря, записанное в безразмерной форме не содержит никаких параметров, характеризующих систему. Это не выполняется для конденсатов, состоящих из частиц разного сорта. В частности, вихри в двухкомпонентном конденсате характеризуются тремя независимыми безразмерными параметрами и, в зависимости от соотношения между ними, могут иметь различную структуру. Некоторые возможные структуры вихрей, несущих одну и две квантованные циркуляции, в двухкомпонентном БЭК рассмотрены в данной работе. Приведены численные решения системы уравнений ГП при различных параметрах. Показано, что распределение плотности в вихре

существенно зависит от знака параметра, описывающего взаимодействие компонент. При его положительном значении, имеются решения, когда плотность вблизи оси вихря оказывается больше равновесной плотности на бесконечности («вихри с уплотнением»). Если вихрь несет одну квантованную циркуляцию, у него плотность на оси может достигать максимального значения, превосходящего равновесную плотность. Для вихрей с двумя квантованными циркуляциями плотность на оси равна нулю, а максимум плотности, превосходящий равновесное значение, достигается на расстоянии от оси порядка корреляционной длины.

Еще одна интересная особенность вихрей, рассмотренная в данной работе, состоит в возможности изменения направления вращения внутри вихря. Показано, что могут существовать вихри, у которых направления вращения вблизи оси вихря и вдали от нее противоположны. Изучены асимптотики вихревых решений на больших расстояниях и показано, что их анализ позволяет делать качественные заключения о структуре вихря.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pitaevskii L.P. Vihrevye linii v neideal'nom Boze-gaze // ZhETF. – 1961. –Т. 40. – S. 646-651.
2. Gross E.P. Structure of a quantized vortex in boson system // Nuovo Cimento. –1961. – Vol. 20. – P. 454-457.
3. Lifshits E.M., Pitaevskii L.P. Statisticheskaya fizika. Chast' 2. – М.: Nauka, 1978. – 447 s.
4. Ivashin A.P., Poluektov Y.M. Nonlocal effect influence on the vortex filament structure in bose-gas // Problems of atomic science and technology, Series: Nuclear Physic Investigations (57). – 2012. – No.1. — P. 265-267.
5. Pitaevskii L.P. Kondensatsiya Boze-Einshteina v magnitnykh lovushkakh. Vvedenie v teoriyu // UFN. – 1998. – Tom. 168. – S. 641-653; Kondensaty Boze-Einshteina v pole lazernogo izlucheniya // UFN. – 2006. – Tom. 176. – S.345-364.
6. Kadomtsev B.B., Kadomtsev M.B. Kondensaty Boze-Einshteina // UFN. – 1997. – Tom.167. – S. 649-664.
7. Pethick C.J., Smith H. Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases, 2nd edn. – Cambridge: Cambridge University Press, 2008. – P. 569.
8. Pitaevskii L.P., Stringari S. Bose-Einstein Condensation. – Oxford: Oxford University Press, 2003. – P. 385.
9. Leanhardt A.E., Gorlitz A., Chikkatur A.P., Kielpinski D., Shin Y., Pritchard D.E., W. Ketterle W. Imprinting vortices in a Bose –Einstein condensate using topological phases // Phys. Rev. Lett. – 2002. – Vol.89. – P. 190403 (1-4).
10. Shin Y., Saba M., Vengalattore M., Pasquini T.A., Sanner C., Leanhardt A.E., Prentiss M., Pritchard D.E. and Ketterle W. Dynamical instability of a doubly quantized vortex in a Bose-Einstein condensate // Phys. Rev. Lett. – 2004. – Vol.93. – P. 160406 (1-4).
11. Myat C.J., Burt E.A., Ghrist R.W., Cornell E.A., Wieman C.E. Production of two overlapping Bose-Einstein condensates by sympathetic cooling // Phys. Rev. Lett. –1997. – Vol.78. – P. 586-589.
12. Stamper-Kurn D.M., Andrews M.R., Chikkatur A.P., Inouye S., Miesner H.-J., Stenger J., Ketterle W. Optical confinement of a Bose-Einstein condensate // Phys. Rev. Lett. – 1998. – Vol.80. – P. 2027-2030.
13. Matthews M.R., Anderson B.P., Hajan P.C., Hall D.C., Wieman C.E., Cornell E.A. Vortices in Bose-Einstein condensate // Phys. Rev. Lett. – 1999. – Vol.83. – P. 2498-2501.
14. Ho T.L., Shenoy V.B. Binary mixtures of Bose condensates of alkali atoms // Phys. Rev. Lett. – 1996. – Vol.77. – P. 3276-3279.
15. Ho T.L. Spinor Bose condensates in optical traps // Phys. Rev. Lett. – 1998. – Vol.81. – P. 742-745.
16. Garcia-Ripoll J.J., Perez-Garcia V.M. Two-mode theory of vortex stability in multicomponent Bose-Einstein condensates // Phys. Rev. A. – 2000. – Vol.62. – P.033601 (1-8).
17. Fetter A.L., Svidzinsky A.A. Vortices in a trapped dilute Bose-Einstein condensate // J. Phys. Condens. Matter. – 2001. – Vol.13. – R135-R194.
18. Kasamatsu K., Tsubota M., Ueda M. Vortices in multicomponent Bose-Einstein condensates // Int. J. Mod. Phys. B. – 2005. – Vol.19. – P. 1835-1904.
19. Ishino S., Tsubota M., Takeuchi H. Instability of overlapped vortices rotating in opposite directions in binary Bose-Einstein condensates // J. Low Temp. Phys. B. – 2013. – Vol.171. – P. 429-435.